MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Martin Petrovič

Spojité modely trhu so stochastickou volatilitou

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 17.7.2018 Martin Petrovič

Som veľmi vďačný prof. RNDr. Bohdanovi Maslowskému, DrSc., predovšetkým za jeho odborné vedenie, ale i za ľudsky veľkorysý prístup, za ústretovosť, trpezlivosť a ochotu, ktoré mi preukázal počas mnohých hodín presedených v jeho kabinete nad touto prácou.

Moja vďaka ďalej patrí rodičom, ktorí zobďaleč s tichou podporou trpezlivo sledovali moje zdĺhavé a kľukaté študijné chodníčky. Okrem nich aj mojim priateľom, kolegom, a všetkým, ktorí ma pri písaní tejto práce akokoľvek podporovali. A osobitne Oldovi a Míši, bez ktorých by toto dielo sotva došlo završenia.

Posledné a hlavné poďakovanie patrí Bohu, všemohúcemu a dobrému Otcovi, v ktorého rukách je všetka naša veda a všetky naše osudy.

> *„Z Božej milosti som tým, čím som, a jeho milosť nebola vo mne márna.“*
>
> *(1 Kor 15, 10)*

Název práce: Spojité modely trhu so stochastickou volatilitou

Autor: Martin Petrovič

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Vilela Mendes a kol. (2015) na základe zistenia, že volatilita výnosov akcií vykazuje dlhú pamäť, navrhujú spojitý trhový model so stochastickou volatilitou, ktorá je daná ako transformácia frakcionálneho Brownovho pohybu (fBm), a za rôznych podmienok skúmajú, či pripúšťa arbitráž a je úplný. Nás zaujíma, či ich závery možno z fBm zovšeobecniť na širšiu triedu hermitovských procesov. Prepracovali a doplnili sme dôkazy tvrdení z citovaného článku. Za predpokladu nezávislosti riadiacich procesov ceny a volatility model nepripúšťa arbitráž, avšak okrem prípadu špeciálneho vzťahu medzi driftom a volatilitou sme dokázali, že nie je úplný. Za iných predpokladov, keď v modeli je len jeden zdroj šumu a proces riadiaci volatilitu ohraničíme, model nepripúšťa arbitráž a je úplný. Všetky tieto výsledky ostávajú v platnosti, ak volatilitu riadi ľubovoľný hermitovský proces.

Klíčová slova: stochastická volatilita, frakcionálny Brownov pohyb, fundamentálne vety oceňovania, hermitovské procesy, ekvivalentná martingalová miera (EMM).

Title: Continuous market models with stochastic volatility

Author: Martin Petrovič

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Vilela Mendes et al. (2015), based on the discovery of long-range dependence in the volatility of stock returns, proposed a stochastic volatility continuous market model where the volatility is given as a transform of the fractional Brownian motion (fBm) and studied its No-Arbitrage and completeness properties under various assumptions. We investigate the possibility of application of their results for fBm to a wider class of Hermite processes. We have reworked and completed the proofs of the propositions in the cited article. Under the assumption of independence of the stock price and volatility driving processes the model is arbitrage-free. However, apart from a case of a special relation between the drift and the volatility, the model is proved to be incomplete. Under a different assumption that there is only one source of randomness in the model and the volatility driving process is bounded, the model is arbitrage-free and complete. All the above results apply to any Hermite process driving the volatility.

Keywords: stochastic volatility, fractional Brownian motion, fundamental theorems of asset pricing, Hermite processes, equivalent martingale measure (EMM).

Obsah

Zoznam použitých skratiek

Textové skratky

BSM	Blackov-Scholesov-Mertonov (model, vzorec)
EMM	ekvivalentná martingalová miera
ELMM	ekvivalentná lokálne martingalová miera
fBp	frakcionálny Brownov pohyb
gBp	geometrický Brownov pohyb
IGP	izonormálny gaussovský proces
SDR	stochastická diferenciálna rovnica
UC	obvyklé podmienky (Usual Conditions)
VM	Vilela Mendesov (model)

Matematické symboly

cl	uzáver množiny (closure)
lin	lineárny obal množiny
$\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$	
$\mathrm{B}(x, y)$	beta funkcia
$a^\top$	transpozícia (vektora, matice) a
$\langle M \rangle$	kvadratická variácia procesu (martingalu) M
$\mathcal{B}(A)$	borelovská σ-algebra nad reálnou množinou A
$\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$	
$\wedge$	$a \wedge b := \min\{a, b\},\ a, b \in \mathbb{R}$
$\overline{\{\mathcal{F}_t\}}$	obohatená filtrácia k filtrácií $\{\mathcal{F}_t\}$
$\mathsf{E}[X \vert \mathcal{F}]$	podmienená stredná hodnota

Úvod

V tejto práci sa zaoberáme teóriou modelovania výnosov rizikových aktív (akcií) na finančných trhoch. Vývoj ceny akcie S_t je vo všeobecnosti dobre popísaný stochastickou diferenciálnou rovnicou (SDR) geometrického Brownovho pohybu

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \,\mathrm{d}t + \sigma S_t \,\mathrm{d}W_t, \quad t \geq 0,$$

kde W je Wienerov proces, avšak konštantné parametre priemerného výnosu μ a volatility σ sú nahradené vhodnými stochastickými procesmi. Prechodom k ekvivalentnej martingalovej miere (EMM), to jest rizikovo neutrálnej miere možno z rovnice odstrániť drift, pozornosť sa preto venuje procesu volatility σ. Je známe, že mnohé empirické vlastnosti cien akcií sú dobre vystihnuté, ak je tento proces modelovaný osobitnou SDR, ktorej riadiaci proces je negatívne korelovaný s procesom W, čo vedie k takzvaným modelom so stochastickou volatilitou (napr. Hestonov model, viď oddiel 2.5).

V poslednej dobe sa pozornosť venuje fenoménu takzvanej *dlhej pamäte* v časových radoch empirickej volatility. Boli vyskúšané rôzne spôsoby nahradenia riadiaceho Wienerovho procesu v rovnici ceny alebo v rovnici volatility frakcionálnym Brownovym pohybom (fBp), ktorý je schopný tento fenomén modelovať. Hovoríme o takzvaných *frakcionálnych modeloch*, konkrétne o modeloch s *frakcionálnou volatilitou*, ak je fBp použitý v rovnici volatility. Väčšina prístupov však prináša rôzne problémy.

Vilela Mendes a Oliveira (2008) navrhujú model so špecifickým vzťahom pre volatilitu, odvodeným z empirickej analýzy trhových dát. Volatilita v ňom nie je daná ako riešenie SDR, ale v explicitnom analytickom tvare, bez nutnosti integrovať podľa frakcionálneho Brownovho pohybu. Konkrétne je to exponenciála jedného prírastku nejakého sebepodobného procesu R_σ cez pevne zvolený krátky časový krok δ:

$$\sigma_t = \exp\Big\{\beta + \frac{1}{\delta}\Big(R_\sigma(t) - R_\sigma(t-\delta)\Big)\Big\},$$

kde β je konštanta. Vilela Mendes, Oliveira a Rodrigues (2015) za R_σ volia fBp s odôvodnením, že ide o najjednoduchší proces s touto vlastnosťou. My budeme skúmať, nakoľko je možné argumenty o existencii a úplnosti EMM z uvedeného článku vztiahnuť na negaussovský hermitovský proces.

Štruktúra práce

V prvej kapitole uvádzame definície základných objektov, s ktorými budeme ďalej pracovať, a niekoľko tvrdení z teórie pravdepodobnosti a finančnej matematiky, ktoré nám poslúžia ako dôležité nástroje, predovšetkým Girsanovova veta a fundamentálne vety oceňovania.

Druhá kapitola je kompilačná, obsahuje prehľad histórie modelovania cien finančných aktív pomocou stochastických procesov s niekoľkými odbočkami do ďalších oblastí finančnej matematiky, ktoré uvádzame pre rozšírenie kontextu. Kapitola mapuje hlavné myšlienky, skrze ktoré sa teória snažila uchopiť a matematicky formulovať správanie trhov, a zastavujeme sa pri niekoľkých bodoch, v ktorých sa výrazne posúva pohľad na problematiku: Blackov-Scholesov-Mertonov model, empirické zistenia o implikovanej a realizovanej volatilite a ich premietnutie sa do teoretických modelov: posun od konštantnej k časovo premennej a ďalej k stochastickej, až k frakcionálnej volatilite. V tejto kapitole nezachádzame do detailov, dôraz kladieme na zorientovanie sa menej znalého čitateľa v problematike, na objasnenie súvislosti medzi skúsenosťou z reálneho sveta a matematickou teóriou a na to, aby uvedené tvrdenia boli sprevádzané referenciami pre podrobnejšie štúdium.

V tretej kapitole zhrnieme od základných pojmov Malliavinovho počtu konštrukciu viacnásobného stochastického integrálu voči náhodnej miere a rozklad pravdepodobnostného priestoru $L^2(\Omega)$ na takzvané Wienerove chaosy. To nám umožní v druhej polovici kapitoly definovať a stručne popísať triedu hermitovských procesov. Z nej potom uvedieme podrobnejšie dva základné príklady, frakcionálny Brownov pohyb a Rosenblattov proces.

V záverečnej štvrtej kapitole postupne prechádzame tromi hlavnými tvrdeniami z práce Vilela Mendes a kol. (2015) a dávame im podrobnejšiu matematickú formuláciu a dôkazy, pričom dopĺňame niektoré neucelené časti. Veľký podiel na tejto kapitole majú naše vlastné výsledky:

Výsledky

Za predpokladu *nezávislosti* riadiacich procesov W v SDR ceny a R_σ vo vzorci volatility sme dezintegráciou súčinového pravdepodobnostného priestoru a konštrukciou EMM na jednej z jeho zložiek dokázali, že Vilela Mendesov model *nepripúšťa arbitráž* (veta 4.1).

Za rovnakých predpokladov sme dokázali, že model je až na špeciálny prípad *neúplný* (veta 4.2). V tomto špeciálnom prípade sme ukázali, že existujú dve ekvivalentné lokálne martingalové miery (veta 4.4), čo je tiež náznak neúplnosti.

Ďalej sme potvrdili, že ak je v modeli iba jeden zdroj šumu, tak vhodným ohraničením procesu R_σ vo vzorci volatility dostaneme úplný model (veta 4.5).

Našim hlavným výsledkom je zistenie, že v žiadnom z preskúmaných tvrdení nie je gaussovskosť, ani iná špecifická vlastnosť odlišujúca fBp od ostatných hermitovských procesov, rozhodujúca. Rovnaké závery o arbitráži a úplnosti ako Vilela Mendes a kol. sme teda dostali *pre ľubovoľný hermitovský proces.*

Kapitola 1

Základné pojmy

V tejto kapitole zhrnieme definície niektorých pojmov zo stochastickej analýzy a z finančnej matematiky (napríklad martingal, arbitráž, hedging a s nimi súvisiace termíny), ktoré budeme potrebovať na formuláciu a vysvetlenie finančných modelov v nasledujúcich kapitolách. Uvedieme i niekoľko tvrdení, ktoré budeme v našom skúmaní opakovane využívať ako základné nástroje, predovšetkým Girsanovovu vetu a fundamentálne vety oceňovania.

Pokiaľ nie je explicitne uvedené inak, v tejto kapitole čerpáme prevažne z týchto zdrojov: Seidler (2011) najmä o martingaloch a Girsanovovej vete, jej obrátenie z Björk (1998), Shreve (2004) o geometrickom Brownovom pohybe, a tiež z práce Sobotka (2014).[1]

1.1 Stochastická analýza

Majme v tejto kapitole ľubovoľnú stochastickú bázu $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathsf{P})$, pevne zvolenú, kde filtrácia $\{\mathcal{F}_t\}$ spĺňa obvyklé podmienky (ozn. UC). Pokiaľ nie je uvedené inak, stochastické procesy uvažujeme na ohraničenom intervale $[0, T]$ pre nejaké pevne zvolené $T > 0$ a symbolom $W = \{W_t\}$ značíme štandardný $\{\mathcal{F}_t\}$-Wienerov proces. O vektoroch budeme uvažovať ako o stĺpcových.

Martingaly

Začnime stochastickou analýzou a rozlíšením rôznych druhov martingalov. Mierne upravené znenie nasledujúcej definície preberáme z práce Týbl (2017, def. 4). Symbolom $\mathcal{B}(A)$ rozumieme borelovskú σ-algebru nad reálnou množinou A, špeciálne $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definícia 1.1. *Náhodný proces* $X = \{X_t\}$ *nazývame* $\{\mathcal{F}_t\}$-progresívne merateľným *(resp.* $\{\mathcal{F}_t\}$-progresívnym*), ak pre* $\forall\, t \in [0, T]$ *zobrazenie definované na* $[0, t] \times \Omega$ *predpisom* $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ *je* $(\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t)$*-merateľné. Ak je filtrácia zrejmá z kontextu, hovoríme jednoducho o progresívne merateľnom (resp. progresívnom) procese.*

[1] Pre doplnenie základnej teórie možno odporučiť tiež skriptá Lachout (2004).

Definícia 1.2. *Hovoríme, že progresívne merateľný proces $X = \{X_t\}$ je:*

(i) Martingal, *ak pre* $0 \leq s \leq t \leq T$

1) $\mathsf{E}[|M_t|] < \infty$,

2) $\mathsf{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$ *s.i.*

(ii) L^2-martingal[2], *ak je martingal, a naviac platí*

3) $\mathsf{E}[M_t^2] < \infty$.

(iii) Lokálny martingal, *ak existuje skoro iste neklesajúca divergentná postupnosť markovovských (t.j. zastavovacích) časov* $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ *taká, že pre* $\forall\, n$ *je zastavený proces* $X_{t\wedge\tau_n}$ *martingal.*

(iv) Semimartingal, *ak je reprezentovateľný v tvare*

$$X_t = L_t + V_t,$$

kde L_t *je lokálny martingal a* V_t *je progresívne merateľný proces s konečnou variáciou.*

Poznámka 1.1.

(i) Zdôraznime, že sme všetky procesy v definícií 1.2 zaviedli na ohraničenom intervale.[3]

(ii) Martingalovú vlastnosť 2) v definícií 1.2 (i) (kde výraz na ľavej strane rovnosti chápeme ako podmienenú strednú hodnotu) možno interpretovať tak, že najlepší odhad budúcej hodnoty M_t urobený v čase $s < t$ pri znalosti *celej* histórie procesu do času s je práve posledný známy stav M_s.

(iii) Každý martingal je triviálne lokálny martingal, ale obrátené tvrdenie platiť nemusí.

Definícia 1.3 (Itoov proces)**.** *Progresívne merateľné procesy* X *a* b *také, že*

$$\int_0^T |X_s|^2 + |b_s| \,\mathrm{d}s < \infty \quad \mathsf{P}\text{-}s.i.$$

a $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$. *Potom* Itoov proces *je proces tvaru*

$$X_t = X_0 + \int_0^t X_s \,\mathrm{d}W_s + \int_0^t b_s \,\mathrm{d}s \quad \mathsf{P}\text{-}s.i., \quad t \in [0, T]. \tag{1.1}$$

Poznámka 1.2. Pripomeňme, že za podmienok definície 1.3 je Itoov integrál[4] lokálny martingal. Ak platí silnejšia podmienka na integrovateľnosť procesu X,

$$\mathsf{E}\int_0^t |X_s|^2 \,\mathrm{d}s < \infty,$$

tak Itoov integrál je martingal, a to hneď L^2-martingal.

Ukážeme si teraz jeden proces, ktorý hrá vo vývoji finančnej matematiky dôležitú úlohu: geometrický Brownov pohyb. Bude užitočné, ak predtým vyslovíme ešte jednu definíciu.

[2] Kvadraticky integrovateľný martingal.

[3] Pre účely tejto práce to postačí, správaním martingalov atď. v nekonečne sa nebudeme zaoberať. V prípade potreby čitateľa odkazujeme na citovanú Seidlerovu monografiu.

[4] Prehľadné vysvetlenie konštrukcie Itoovho integrálu pre jednodimenzionálny proces možno nájsť napríklad v monografii Øksendal (2014).

Definícia 1.4. *Majme $T > 0$, $t \in [0, T]$.* Stochastická diferenciálna rovnica (SDR) *je rovnica tvaru*

$$(1.2) \qquad X_s = X_0 + \int_0^s \beta(t, X_t)\, \mathrm{d}t + \int_0^s \gamma(t, X_t)\, \mathrm{d}W_t \quad \mathsf{P}\text{-}s.i., \quad s \in [0, T],$$

kde $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ je počiatočná podmienka, *$\{X_t\}$ je progresívne merateľný proces a $\beta(t, x)$, $\gamma(t, x)$ sú dané funkcie také, že*

$$\int_0^T |\gamma(t, X_t)|^2 + |\beta(t, X_t)|\, \mathrm{d}t < \infty \quad \mathsf{P}\text{-}s.i.$$

Pre rovnicu (1.2) zaveďme symbolický zápis, takzvaný diferenciálny tvar

$$(1.3) \qquad \mathrm{d}X_t = \beta(t, X_t)\, \mathrm{d}t + \gamma(t, X_t)\, \mathrm{d}W_t, \quad t \in [0, T].$$

Definícia 1.5. Geometrický Brownov pohyb (gBp) *je proces S tvaru*

$$(1.4) \qquad S_t = S_0 \exp\Big\{\Big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)t + \sigma W_t\Big\} \quad \mathsf{P}\text{-}s.i.,$$

kde $S_0 = s_0 > 0$ a μ, σ sú reálne parametre.

Poznámka 1.3.

(i) Pomocou Itoovej formule sa ľahko ukáže, že gBp je riešením SDR

$$(1.5) \qquad \mathrm{d}S_t = \mu S_t\, \mathrm{d}t + \sigma S_t\, \mathrm{d}W_t \quad \mathsf{P}\text{-s.i.}, \quad t \in [0, T].$$

(ii) Nech $\{\mu_t\}$, $\{\sigma_t\}$ sú progresívne merateľné reálne procesy také, že

$$\int_0^T |\mu_t| + |\sigma_t|^2\, \mathrm{d}t < \infty \quad \mathsf{P}\text{-s.i.}$$

Potom sa analogicky ukáže, že proces

$$(1.6) \qquad S_s = S_0 \exp\Big\{\int_0^s \Big(\mu_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\Big)\, \mathrm{d}t + \int_0^s \sigma_t\, \mathrm{d}W_t\Big\} \quad \mathsf{P}\text{-s.i.}$$

je riešením SDR tvaru (1.5), kde $\mu = \mu_t$ a $\sigma = \sigma_t$. Proces (1.6) sa nazýva *zovšeobecnený geometrický Brownov pohyb.*

(iii) Zo vzťahu (1.4) vidíme, že ak S je gBp, S_t má pre každé $t \in [0, T]$ log-normálne rozdelenie. V prípade zovšeobecneného gBp to však platiť nemusí.

Girsanovova veta a jej obrátenie

Uvedieme tu tieto dva silné nástroje na absolútne spojitú zmenu miery, s ktorými budeme ďalej v aplikáciách finančnej matematiky často pracovať, najmä s pôvodnou Girsanovovou vetou. Jej znenie je prevzaté zo 7. kapitoly knihy Seidler (2011).

Veta 1.1 (Girsanov, 1960)**.** *Nech W je n-dimenzionálny $\{\mathcal{F}_t\}$-Wienerov proces a nech X je progresívne merateľný n-dimenzionálny náhodný proces spĺňajúci $X \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^n)$ P-skoro iste pre nejaké $T > 0$. Položme*

$$(1.7) \qquad G_t(X) = \exp\Big\{\int_0^t X_s^\top\, \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|X_s\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)}\, \mathrm{d}s\Big\}, \quad 0 \le t \le T$$

a predpokladajme, že $\mathsf{E}\, G_T(X) = 1$.
Nech $\widetilde{\mathsf{P}}$ *je pravdepodobnostná miera na* $\mathcal{F}_T$ *s hustotou* $G_T(X)$ *voči miere* P*, to jest* $\mathrm{d}\widetilde{\mathsf{P}}(\omega) = G_T(X)(\omega)\, \mathrm{d}\mathsf{P}(\omega)$*. Definujme*

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t X_s\, \mathrm{d}s, \quad 0 \le t \le T.$$

Potom $\{\widetilde{W}_t : 0 \le t \le T\}$ *je* n*-dimenzionálny* $\{\mathcal{F}_t\}$*-Wienerov proces na pravdepodobnostnom priestore* $(\Omega, \mathcal{F}_T, \widetilde{\mathsf{P}})$.

Dôkaz. Viď Seidler (2011, Věta 7.1). □

Poznámka 1.4.

(i) Vo vzťahu (1.7) Itoov integrál n-dimenzionálneho procesu X podľa n-dimenzionálneho Wienerovho procesu W chápeme v zmysle

$$\int_0^t X_s^\top\, \mathrm{d}W_s = \sum_{j=1}^n \int_0^t X_s^j\, \mathrm{d}W_s^j, \tag{1.8}$$

kde $X = (X^j, j = 1, \dots, n)$ a $W = (W^j, j = 1, \dots, n)$.

(ii) Všimnime si, že hustota daná vzťahom (1.7) je v tvare stochastickej exponenciály:

$$G_t(X) = \mathscr{E}\Big(\int_0^\bullet X_s^\top\, \mathrm{d}W_s\Big)_t,$$

kde pre $t \in [0, T]$ a M spojitý lokálny martingal, $M_0 = 0$,

$$\mathscr{E}(M)_t := \exp\Big(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\Big),$$

je takzvaná *stochastická*, alebo *Doléansovej exponenciála* (spojitého lokálneho) martingalu. Symbol $\langle M\rangle$ značí kvadratickú variáciu procesu M.

Predpoklad $\mathsf{E}\, G_T(X) = 1$ je obvykle ťažko overiteľný zo vzťahu (1.7), preto bola snaha nájsť preň nejakú postačujúcu podmienku. Najbežnejšie sa uplatňuje nasledujúca, takzvaná *Novikovova podmienka* (Novikov, 1973; uvádzame špeciálny prípad znenia z citovanej Seidlerovej knihy):

Tvrdenie 1.2. *Ak* M *je spojitý lokálny martingal,* $M_0 = 0$ *a platí*

$$\mathsf{E} \exp\Big\{\frac{1}{2}\langle M\rangle_T\Big\} < \infty, \tag{1.9}$$

tak $\mathsf{E}\, \mathscr{E}(M)_T = 1$.

Teraz vyvstáva otázka, či Girsanovova veta pokrýva všetky možné absolútne spojité transformácie miery. Ukazuje sa, že to platí, ale len v prípade, že nemáme na stochastickej báze iný zdroj šumu okrem jediného Wienerovho procesu.

Veta 1.3 (Obrátenie Girsanovovej vety.)**.** *Nech* W *je* n*-dimenzionálny štandardný* $\{\mathcal{F}_t\}$*-Wienerov proces. Predpokladajme, že filtrácia* $\{\mathcal{F}_t\}$ *je týmto Wienerovym procesom generovaná. Nech existuje miera* $\widehat{\mathsf{P}}$ *absolútne spojitá voči* P *na* $(\Omega, \mathcal{F}_T)$*. Potom existuje* n*-dimenzionálny progresívne merateľný proces* ϕ *taký, že* $\widehat{\mathsf{P}}$ *má voči* P *hustotu*

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{\mathsf{P}}}{\mathrm{d}\mathsf{P}} = \mathscr{E}\{\int_0^T \phi_s^\top\, \mathrm{d}W_s\}.$$

Dôkaz. Viď Björk (1998, Theorem 11.6). □

1.2 Finančná matematika

V tomto oddiele uvedieme pre nás kľúčové definície z finančnej matematiky a znenie dvoch takzvaných fundamentálnych viet oceňovania[5]. Čerpáme z monografie Shreve (2004), predovšetkým zo štvrtej a piatej kapitoly.

Vyslovme predpoklad, že pri modelovaní trhov budeme vždy uvažovať $\{\mathcal{F}_t\}$-progresívne merateľné procesy na ohraničenom intervale $[0, T]$, kde $T > 0$ interpretujeme ako investičný horizont, čiže čas, kedy končíme s investovaním a vyhodnocujeme výsledky. Niekedy budeme o $[0, T]$ hovoriť ako o investičnom období. Sigma-algebra $\{\mathcal{F}_t\}$ sa interpretuje ako vývoj verejne dostupných informácií o trhoch.

Pre prehľadnosť značenia pri popisovaní finančných veličín často vynechávame časový index. V takom prípade rozumieme, že uvedené vzťahy platia pre všetky $t \in [0, T]$.

Trhom (*trhovým modelom, modelom trhu*) rozumieme $(n + 1)$-dimenzionálny progresívne merateľný proces $(S^1, \ldots, S^n, A)^\top$. Zložky S^i, $i = 1, \ldots, n$, predstavujú ceny jednotlivých obchodovaných *rizikových aktív*, typicky akcií[6]. My budeme pre jednoduchosť uvažovať $n = 1$, čiže model s jednou akciou značenou S. Väčšina argumentov sa dá veľmi priamočiaro rozšíriť na viacdimenzionálny trhový model.

Zložka A je takzvané *bezrizikové aktívum*, alebo *(spojitý) úročiaci proces*, to jest hodnota peňažnej jednotky (napr. 1€) vloženej v čase $t_0 = 0$ na peňažný účet.[7] Tento úročiaci proces je modelovaný vzorcom

$$A_t = \mathrm{e}^{\int_0^t r_s \, \mathrm{d}s},$$

kde $\{r_t\}$ je sprava spojitý proces aktuálnej úrokovej miery.

Ekvivalentne možno namiesto A v definícií použiť *diskontný proces*

$$D_t = \frac{1}{A_t} = \mathrm{e}^{-\int_0^t r_s \, \mathrm{d}s}.$$

Ten predstavuje hodnotu vkladu v čase $t_0 = 0$, ktorý by dnes, to jest v čase t, mal hodnotu peňažnej jednotky. *Diskontovaním* potom rozumieme násobenie diskontným procesom. Diskontovanú cenu akcie S v čase t budeme značiť $S_t^* := D_t S_t$. Pre jednoduchosť budeme uvažovať konštantnú úrokovú mieru $r_t \equiv r > 0$ a deterministický diskontný proces $D = \exp\{-rt\}$.

Formulovať trhový model potom znamená asi toľko, ako určiť *pravdepodobnostný mechanizmus vývoja*[8] cien akcií S^i, typicky pomocou SDR. Používa sa k tomu takmer výhradne zovšeobecnený gBp, ktorý sme uviedli v predošlom oddiele. Shreve (2004, s. 148) uvádza, že tento prípad zahŕňa všetky možné modely ceny aktíva, ktoré súčasne

1. sú vždy kladné,
2. nemajú skoky,
3. sú riadené len jedným Wienerovym procesom.

[5] Anglicky „Fundamental Theorems of Asset Pricing“.

[6] Rizikovými aktívami môžu byť aj iné obchodovateľné komodity, ako napr. zlato,nie však tzv. cenné papiere s pevným výnosom, ako sú dlhopisy, ktoré sa modelujú iným spôsobom. Majúc v pamäti tento širší kontext, budeme používať výrazy akcia a (rizikové) aktívum ako synonymá.

[7] Bezrizikové aktívum nie je hotovosť (peňažná mena). Tú používame len ako mernú jednotku. Ak by sme pripustili v modeli vedľa bankového účtu A aj hotovosť, vznikla by arbitráž.

[8] V angličtine sa často používa termín „dynamics“.

Portfóliom rozumieme spôsob umiestenia investorovho kapitálu do trhových aktív. Je jednoznačne dané n-dimenzionálnym procesom $\Delta = (\Delta^1, \dots, \Delta^n)^\top$, určujúcim počet kusov jednotlivých akcií, a reálnym procesom Δ^B vyjadrujúcim obnos na peňažnom účte. *Hodnotu portfólia*, označme ju X, potom spočítame ako

$$X = (S^1, \dots, S^n) \cdot \Delta + \Delta^B,$$

kde bodka značí skalárny súčin.

Definícia 1.6. Arbitráž (arbitrážne portfólio) *je portfólio, ktorého hodnota X má nasledujúce vlastnosti:*

(i) $X_0 \equiv 0$,

(ii) $\mathsf{P}[X_T < 0] = 0$,

(iii) $\mathsf{P}[X_T > 0] > 0$.

Arbitráž je teda situácia, keď si „s prázdnymi vreckami“ zabezpečíme, že neprídeme do straty, ale máme kladnú pravdepodobnosť niečo získať. *Princíp bezarbitrážneho ocenenia*[9] hovorí, že je vhodné modelovať trhy tak, aby model arbitráž nepripúšťal. Tento predpoklad nie je príliš vzdialený realite, ako sa argumentuje, lebo ak vznikne arbitrážna príležitosť, najšikovnejší investori ju rýchlo využijú, čím zároveň skrze zákon ponuky a dopytu zmenia ceny, a trh sa dostane do novej bezarbitrážnej rovnováhy.

Z tohto princípu, ktorý je snáď najzákladnejším východiskom finančnej matematiky, vyplýva, že ak by dve aktíva X a V mali v investičnom horizonte T skoro iste rovnakú výplatu $X_T = V_T$ a existoval by skorší čas $t \in [0, T]$, kedy by sa ich hodnoty nerovnali, vznikla by arbitrážna príležitosť. Ak teda dve aktíva majú v nejakom čase rovnakú cenu, musia mať rovnakú cenu v každom skoršom čase (P-skoro iste). Z tejto myšlienky vychádza nasledujúca definícia:

Definícia 1.7. Hedging (hedžing, replikačné portfólio)[10] *náhodnej výplaty V_T, respektíve aktíva vyplácajúceho vo finálnom čase T výplatu V_T, je portfólio, ktorého hodnota X má nasledujúce vlastnosti:*

(i) $X_0 \equiv x_0 \in \mathbb{R}$ *je deterministická hodnota,*

(ii) $X_T = V_T$ P-*s.i.*

Ak sa nám podarí nájsť také portfólio X, čiže nájsť hedging, tak podľa princípu bezarbitrážneho oceňovania možno aktívum vyplácajúce vo finálnom čase T výplatu V_T oceniť spôsobom $V_t := X_t$, $t \in [0, T]$.

Definícia 1.8. *Hovoríme, že trh, respektíve model trhu je* úplný, *ak v ňom ľubovoľnú výplatu V_T možno hedžovať (t.j. nájsť pre ňu hedžing).*

V teórií martingalového oceňovania hedžovanie úzko súvisí s absolútne spojitou transformáciou miery, to jest s prechodom k ekvivalentnej miere.

[9] Anglicky „No-Arbitrage (principle)“, „Arbitrage-free pricing“. Použitý slovenský termín je prevzatý z knihy Melicherčík, Olšarová a Úradníček (2005).

[10] Anglicky „hedge“ alebo „replicating portfolio“.

Definícia 1.9. *Majme trhový model na stochastickej báze* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathsf{P})$ *a ďalšiu mieru* $\widehat{\mathsf{P}}$ *na* $(\Omega, \mathcal{F})$.

(i) *Hovoríme, že miery* P *a* $\widehat{\mathsf{P}}$ *sú* ekvivalentné*, ak platí, že majú rovnaké nulové množiny, to jest ak* $\forall\, A \in \mathcal{F}\ \ \mathsf{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \widehat{\mathsf{P}}(A) = 0$.

(ii) *Mieru* $\widehat{\mathsf{P}}$ *ekvivalentnú miere* P *nazveme* ekvivalentnou martingalovou mierou (EMM)*, ak diskontovaná cena každej akcie na trhu,* S_t^{i*}, $i = 1, \ldots, n$, *je voči miere* $\widehat{\mathsf{P}}$ $\{\mathcal{F}_t\}$*-martingal. Ak diskontovaná cena akcie je iba lokálny martingal, hovoríme o* ekvivalentnej lokálne martingalovej miere (ELMM)*.*

Teraz už sme pripravení vysloviť dve takzvané fundamentálne vety oceňovania[11]. Dôkazy možno nájsť v monografií Shreve (2004, s. 228–234), tu ich len naznačíme.

Veta 1.4 (Prvá fundamentálna veta oceňovania; Shreve, 2004, veta 5.4.7)**.** *Ak v trhovom modeli existuje EMM, tak model nepripúšťa arbitráž.*

Dôkaz. Nech $\widehat{\mathsf{P}}$ je EMM. Dá sa ukázať, že hodnota ľubovoľného diskontovaného portfólia $\{D_t X_t\}$, špeciálne arbitrážneho portfólia, je $\widehat{\mathsf{P}}$-martingal. Potom z definície 1.6 a konštantnosti strednej hodnoty martingalu:

$$\widehat{\mathsf{E}}[D_T X_T] = \widehat{\mathsf{E}}[D_0 X_0] \overset{\text{(i)}}{=} 0; \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}
&\text{ďalej} && 0 \overset{\text{(ii)}}{=} \mathsf{P}[X_T < 0] = \mathsf{P}[D_T X_T < 0] && \\
&\Leftrightarrow && 0 = \widehat{\mathsf{P}}[D_T X_T < 0] && \\
&\Rightarrow && 0 = \widehat{\mathsf{P}}[D_T X_T > 0], && \text{opak by bol v spore s (1.10)}, \\
&\Leftrightarrow && 0 = \mathsf{P}[X_T > 0], && \text{čo je spor s definíciou 1.6 (iii)}. \quad \square
\end{aligned}$$

Veta 1.5 (Druhá fundamentálna veta oceňovania; Shreve, 2004, veta 5.4.9)**.** *Majme stochastickú bázu* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^T, \mathsf{P})$ *a na nej trhový model, v ktorom existuje EMM. Nech* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ *a* $\{\mathcal{F}_t\}$ *je generovaná riadiacim procesom z tohto trhového modelu. Potom model je úplný práve vtedy, keď EMM je jednoznačná.*

Dôkaz. Ukážeme len, že úplnosť modelu implikuje jednoznačnosť EMM. Chceme predviesť túto myšlienku, ktorú využijeme aj vo vlastných dôkazoch v 4. kapitole.

Nech existujú $\widehat{\mathsf{P}}_1$, $\widehat{\mathsf{P}}_2$ dve EMM. Model je úplný, takže ľubovoľnú výplatu V_T možno hedžovať. Vezmime aktívum, ktoré vypláca v čase T hodnotu $V_T = \mathbb{I}_A\, D_T^{-1}$, $A \in \mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ ľubovoľná. Potom z definície 1.7 a martingalovej vlastnosti pre $\forall\, A \in \mathcal{F}$ P-s.i. platí:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathsf{P}}_1(A) = \widehat{\mathsf{E}}_1[V_T D_T] \overset{\text{(ii)}}{=} \widehat{\mathsf{E}}_1[X_T D_T] = \widehat{\mathsf{E}}_1[X_0 D_0] \overset{\text{(i)}}{=} x_0 \\
\overset{\text{(i)}}{=} \widehat{\mathsf{E}}_2[X_0 D_0] = \widehat{\mathsf{E}}_2[X_T D_T] \overset{\text{(ii)}}{=} \widehat{\mathsf{E}}_2[V_T D_T] = \widehat{\mathsf{P}}_2(A),
\end{aligned}$$

takže miery $\widehat{\mathsf{P}}_1$ a $\widehat{\mathsf{P}}_2$ sú skoro iste totožné. $\square$

Tieto klasické formulácie sú prevzaté z kontextu modelov v diskrétnom čase, kde je prvá fundamentálna veta oceňovania dokonca ekvivalenciou (Harrison a Pliska, 1981). Čo sa týka modelov v spojitom čase, tu uvedená formulácia platí. Otázka obrátenej implikácie je však výrazne zložitejšia (viď Schachermayer, 2010).

[11] Anglicky „fundamental theorems of asset pricing“.

Kapitola 2

Vývoj modelovania volatility

V tejto kapitole dokumentujeme vývoj finančnej matematiky s dôrazom na modelovanie volatility. Chceme načrtnúť, ako sa rôzne empirické pozorovania o trhoch pretranformovali do princípov, z ktorých dnes vychádzame pri tvorbe modelov. Ako podklady pre túto kapitolu nám poslúžila predovšetkým monografia Epps (2009), ďalej Shreve (2004), v častiach o modeloch so stochastickou a frakcionálnou volatilitou tiež Čekal (2012) a Sobotka (2014).

2.1 Začiatky finančného modelovania po Blackov-Scholesov-Mertonov model

História modelovania výnosov na finančných trhoch pomocou stochastických procesov sa začala, keď Bachelier (1900) formuloval matematický model Brownovho pohybu, dnes známy ako Wienerov proces. Plnšie rozvinutie teórie však umožnil až neskôr Itô (1944) zavedením integrálu voči Wienerovmu procesu a formuláciou *Itoovej izometrie* a *Itoovho vzorca* (*Itoovej formule*), vďaka ktorým je tento integrál dobre aplikovateľný.

Medzičasom sa rozvíjali iné, skôr statické ekonomické modely, napríklad *teória bezarbitrážneho oceňovania*, podľa ktorej je vhodné pre „spravodlivé" ocenenie uvažovať o trhoch tak, že jedno aktívum nemôže mať dve rôzne ceny (porov. oddiel 1.2). Markowitz (1952) vo svojej teórií portfólia pracoval s prvými dvoma momentami výnosov akcií ako v jednokrokovom diskrétnom modeli, teda v podstate tiež staticky, ako s konštantami.

V 60. rokoch sa Samuelson (1965) (neskôr tiež Samuelson, 1973) vrátil k myšlienke stochastických procesov a argumentoval, že lepším modelom než Wienerov proces je *geometrický Brownov pohyb* vedúci k log-normálnemu rozdeleniu výnosov. Už v tej dobe však Mandelbrot (1963) poukázal na to, že ceny akcií, ba ani logaritmické výnosy nesledujú gaussovské rozdelenie. Majú totiž väčšiu špicatosť a ťažšie chvosty.[1]

Merton (1969)[2] zaviedol do finančnej matematiky používanie stochastickej analýzy. Prelom spôsobil krátko na to *Blackov-Scholesov-Mertonov (BSM) model* (Black a Scholes, 1973 a Merton, 1973), v ktorom sa spája teória bezarbitrážneho

[1] Tento fakt je dnes už dobre známy, pekné grafické znázornenie možno nájsť napr. v práci Sobotka (2014, s. 2).

[2] Tento a ďalšie texty možno nájsť v zbierke Merton (1990).

oceňovania a teória náhodných procesov, čím sa začína vo vývoji disciplíny nová etapa martingalového oceňovania založeného na *Girsanovovej vete* a zmene miery.

BSM model predpokladá, že cena podkladového aktíva sleduje gBp (1.4). Driftový člen sa však odstráni použitím Girsanovovej vety, takže model umožnil explicitne oceniť európske opcie na základe trhových dát za pomoci jediného parametra (volatility). Takouto praktickou aplikovateľnosťou dodal finančnej matematike nielen obľubu a motiváciu, ale i zdroje dát pre ďalšie skúmanie. V tom istom roku, keď bol publikovaný, totiž bola otvorená Chicago Board Option Exchange, prvá burza pre obchodovanie s opciami. Dovtedy to boli skôr zriedkavé dvojstranné obchody, tzv. over the counter.

2.2 Implikovaná volatilita

Rubinstein (1985) v analýze raných trhových dát našiel len malé odchýlky od BSM modelu, čo zrejme súvisí s tým, že ho v 70. rokoch využívali takmer všetci investori. Prelom však nastal po finančnej kríze roku 1987, keď sa v trhových dátach začali ukazovať známky nesúladu s dovtedajšou teóriou.

Výraznou je najmä *konvexná krivka implikovanej volatility*, známa ako *(implied) volatility smile*. Pre zvolenú akciu, pevnú dobu do splatnosti T a danú realizačnú cenu[3] X označme $C^{\mathrm{M}}(X,T)$ empirickú trhovú cenu európskej call opcie a $C^{\mathrm{BSM}}(\sigma,X,T)$ teoretickú cenu stanovenú BSM vzorcom, kde σ je parameter volatility. Implikovanou volatilitou nazývame hodnotu $\hat{\sigma}(X)$, pri ktorej platí

$$C^{\mathrm{M}}(X,T) = C^{\mathrm{BSM}}(\hat{\sigma}(X),X,T).$$

Ak teraz budeme meniť realizačnú cenu X, grafom funkcie $\sigma(X)$ bude konvexná krivka, ktorej minimum je blízko okamžitej, takzvanej spotovej ceny. Čím je realizačná cena ďalej od spotovej, jedným či druhým smerom, tým je implikovaná volatilita vyššia. Podľa teórie by však volatilita mala byť rovnaká bez ohľadu na realizačnú cenu opcie, pretože ide o konštantný parameter tej istej podkladovej akcie.

Podobným javom je takzvaná *časová štruktúra implikovanej volatility*. Ak pre tú istú akciu a pevnú realizačnú cenu budeme sledovať opcie s rôznou dobou do splatnosti, pozorujeme, že sa mení tvar krivky implikovanej volatility – splošťuje sa s rastúcou dobou do splatnosti T. Presnejšie, pre fixnú realizačnú cenu X obvykle platí, že $\hat{\sigma}$ klesá s T, ak v poslednej dobe boli trhy rozbúrené, to jest ak volatilita bola nad dlhodobým priemerom, a naopak $\hat{\sigma}$ rastie s T, ak trhy boli veľmi pokojné. To akoby naznačovalo, že volatilita má sklon vracať sa k istej stabilnej, či dlhodobej hodnote.

Z pozorovaní o implikovanej volatilite je zrejmé, že existujú výrazné trhové vzťahy, ktoré BSM model nie je schopný zachytiť. Ihneď je jasné, že ak chceme modelovať cenu podkladového aktíva v tvare gBp (1.4), parameter volatility nemôže byť konštantný – také zjednodušenie je príliš vzdialené od reality. Riešenie SDR (1.5) a zmena miery sú však analogické pre parameter priemerného výnosu μ, volatilitu σ a úrokovú mieru r chápané ako deterministické funkcie času a za splnenia miernych podmienok na adaptovanosť a integrovateľnosť aj ako náhodné

[3] Anglicky „strike price“.

procesy, až na to, že rozdelenie výnosov už nebude log-normálne (viď pozn. 1.3 (iii), tiež Shreve, 2004, kap. 4 a 5).

Ak teda je možné, aby parametre μ a σ boli nekonštantné, vyvstáva otázka, aký ich tvar je vhodný.

2.3 Empirické správanie volatility

Okrem výskytu „volatility smile“ boli v štúdiách pozorované aj ďalšie opakujúce sa *empirické javy.* Hoci ide o zistenia štatistickej povahy, teória financií niektoré z nich formulovala ako všeobecne platné zákonitosti správania trhov.[4] Tieto empirické javy určili smer ďalšieho vývoja oboru, pretože sa stali kritériami kvality modelov: dobrý model by mal byť schopný ich napodobniť. Jedným z takých javov je napríklad vyššie zmienený výskyt *ťažkých koncov* rozdelenia (logaritmických) výnosov. V tomto oddiele uvedieme dva ďalšie empirické javy, oba súvisiace s volatilitou: zhlukovanie volatility a pákový efekt. V nasledujúcich oddieloch potom ukážeme, ako sa ich pozorovanie premietlo do uvažovania o trhových modeloch.

Epps (2009, empirický projekt 4 a kap. 20) ilustruje tieto empirické javy pomocou regresného modelu tvaru

$$R_t^2 = \alpha + \beta_1 R_{t-1}^2 + \cdots + \beta_k R_{t-k}^2 + \gamma S_{t-1}^{-1} + u_t,$$

kde

- $k \in \mathbb{N}$, $t > k$,
- α, β_i a γ sú regresné koeficienty
- S_t je cena aktíva (vrátane dividendy vyplatenej v čase t)[5],
- $R_t = \log(S_t/S_{t-1})$ sú logaritmické výnosy,
- $\{u_t\}$ sú nekorelované normované náhodné chyby, či inovácie.

V dlhých časových radoch logaritmických výnosov s vysokou frekvenciou (čo je typicky splnené, keďže ceny na burze sú dostupné na dennej báze za viacero rokov) obvykle nachádzame štatisticky významné kladné odhady koeficientov β_i pre niekoľko prvých posunov, napríklad $i = 1, \ldots 5$, a často i významné kladné odhady γ (viď napr. Christie (1982), alebo Epps (1996)).

Kladné odhady koeficientov dokumentujú prvý z uvedených empirických javov, takzvané *zhlukovanie volatility*[6], čo znamená, že aktuálna úroveň volatility, či už nízka alebo vysoká, má tendenciu pretrvávať počas dlhšieho obdobia.

Druhým empirickým javom je takzvaný *pákový efekt*[7], ilustrovaný kladným odhadom koeficientu γ, čo je v podstate nepriama úmera medzi výnosom a vola-

[4] Odtiaľ anglický termín „stylized facts“. Taylor (2007, s. 51) píše: „General properties that are expected to be present in any set of returns are called *stylized facts.*“ Nie je nám známy zaužívaný slovenský ekvivalent. Či doslovný preklad „štylizované fakty“, použitý v niektorých záverečných prácach, významovo zodpovedá anglickému pojmu, je podľa našej mienky diskutabilné. Vhodný výraz by mal vyjadriť, že nejde o kauzálnu nutnosť, ale o náhodný jav, avšak tak častý, že je užitočné brať ho ako pravidlo, fakt. Náš termín *empirické javy* skôr hovorí, že ide o čosi odpozorované.

[5] Cena upravená o dividendu, anglicky „dividend corrected price“. Umožňuje sledovať celkovú výkonnosť akcie.

[6] Anglicky „volatility clustering“.

[7] Anglicky „leverage effect“, niekedy tiež „volatility leverage“. Epps (2009, s. 308) uvádza, že podľa pôvodných dohadov tento jav mal súvisieť s pomerom dlhu k vlastnému kapitálu firmy.

tilitou: v obdobiach, keď sa aktuálna cena pohybuje pod dlhodobým priemerom, je volatilita vysoká a naopak, keď cena je nad dlhodobým priemerom, volatilita je nízka.

2.4 Modely s dynamickou volatilitou

Príkladom snáh o zachytenie týchto empirických javov v modelovaní volatility v diskrétnom čase sú rozšírenia ARMA a ARIMA modelov Boxovej-Jenkinsovej metodológie (Box a Jenkins, 1970), známe ako (G)ARCH, (generalized) autoregressive conditional heteroscedasticity models (Engle, 1982). Uvádzame ich tu len na okraj ako dôležitý bod vo vývoji uvažovania o časovej premenlivosti volatility.

Vráťme sa však k modelom v spojitom čase a uveďme tu dva, ktoré sa snažia zachytiť vzťahy popísané v predchádzajúcom oddiele tým, že dovolia, aby volatilita bola dynamická, teda premenlivá v čase.

Prvý z týchto modelov je nazývaný *CEV model* (z angl. Constant Elasticity of Variance). Cox a Ross (1976) ho formulovali ako intuitívne rozšírenie gBp nasledujúcou stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \,\mathrm{d}t + \underbrace{\left(\sigma_0 S_t^{\gamma-1}\right)}_{\sigma(t,\gamma)} S_t \,\mathrm{d}W_t, \tag{2.1}$$

kde $\sigma_0 > 0$ je konštanta, $\gamma \in (0,1]$ a ostatné značenie je ako v gBp. Pre $\gamma = 1$ dostávame klasický gBp, pre $\gamma < 1$ však okamžitá volatilita $\sigma(t,\gamma)$ klesá s rastúcou aktuálnou cenou a naopak, v súlade s pákovým efektom. Názov CEV hovorí, že elasticita logaritmickej volatility voči logaritmickej cene je konštantná:

$$\frac{\mathrm{d}\log\left(\sigma_0 S_t^{\gamma-1}\right)}{\mathrm{d}\log S_t} = \gamma - 1.$$

Výhodou modelu je, že je známe riešenie rovnice (2.1). CEV model skutočne redukuje „volatility smile“, pretože zachytáva aspoň čiastočne pákový efekt: volatilita je vyššia, ak cena podkladovej akcie je hlbšie pod realizačnou cenou opcie. Nemodeluje však dobre jav zhlukovania volatility.

Ako druhý uvedieme *Hobsonov-Rogersov model* (Hobson a Rogers, 1998), ktorý nechává okamžitú volatilitu závisieť na vychýlení aktuálnej ceny od normálnej hladiny, určenej priemerom minulých cien s exponenciálne klesajúcou váhou:

$$\mathrm{d}s_t = \mu(\Delta_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(\Delta_t)\,\mathrm{d}W_t,$$

kde $s_t := \log(D_t S_t)$ je logaritmus diskontovanej ceny aktíva a miera vychýlenia je

$$\Delta_t = s_t - \lambda \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\lambda(t-u)} s_u \,\mathrm{d}u,$$

kde $\lambda > 0$ je intenzita poklesu vplyvu minulých cien na normálnu hladinu. Na vyhladenie „smile“ krivky implikovanej volatility možno použiť napríklad funkciu $\sigma(\Delta_t) = \sigma_0 \Delta_t^2$, ktorá zvýši volatilitu, ak sa aktuálna cena aktíva výrazne

Tomuto pomeru sa niekedy hovorí páka (leverage), odkiaľ vzišiel názov. Epps hneď dodáva, že toto vysvetlenie je neúplné – stačí si všimnúť, že zmienený vzťah ceny akcie a volatility nijako nezohľadňuje zadĺženosť firmy. Historický názov tohto empirického javu sa však zachoval.

vychýli na jednu či druhú stranu. Nevýhodou modelu je, že pri žiadnej špecifikácií funkcie $\sigma(\Delta_t)$ nepoznáme presné podmienené rozdelenie ceny akcie S_t, takže oceňovacie rovnice sa musia riešiť numericky.

2.5 Modely so stochastickou volatilitou

Oba modely uvedené v predchádzajúcom oddiele majú spoločnú vlastnosť, že obsahujú len jeden zdroj náhodnosti, to jest jeden riadiaci Wienerov proces. Výhoda tohto prístupu je, že zabezpečuje jednoznačnosť EMM, a teda úplnosť modelu. Objavila sa však myšlienka, že pre lepšie zachytenie empirických javov je potrebné pripustiť, že trhy v sebe skrývajú ďalšie riziko, ktoré neplynie priamo z cien akcií. To znamená, že v modeli musí byť ďalší zdroj náhodnosti. Ďalším krokom vo vývoji finančnej matematiky sú teda modely, kde je volatilita skutočne stochastická to jest daná osobitnou SDR s vlastným riadiacim procesom.

Ako prví model so stochastickou volatilitou navrhli Hull a White (1987). Bol popísaný dvoma SDR tvaru geometrického Brownovho pohybu

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \,\mathrm{d}t + \sigma_t S_t \,\mathrm{d}W_t, \tag{2.2}$$

$$\mathrm{d}\sigma_t^2 = C_1 \sigma_t^2 \,\mathrm{d}t + C_2 \sigma_t^2 \,\mathrm{d}W_t^*, \tag{2.3}$$

kde W a W^* sú nezávislé Wienerove procesy a μ, $C_1, \in \mathbb{R}$, $C_2 > 0$ sú parametre modelu. V aplikáciách sa v tomto i nasledujúcich modeloch obvykle pracuje s deterministickými počiatočnými podmienkami S_0, $\sigma_0 \in \mathbb{R}_+$. *Hullov-Whiteov* model umožňuje podať analytický vzorec pre ocenenie európskej opcie a je možné explicitne spočítať aj niektoré štatistické charakteristiky. Bol však kritizovaný za to, že rozptyl σ^2 modelovaný geometrickým Brownovym pohybom (2.3) nie je schopný dostatočne reflektovať časovú štruktúru implikovanej volatility (viď napr. Chin, 2011).

Wiggins (1987) navrhol zaviesť korelačný koeficient medzi riadiacimi procesmi ako ďalší parameter $\rho \in (-1, 1)$ taký, že $\mathsf{E}[W_t W_t^*] = \rho t$. Tento prístup sa potom ujal vo všetkých ďalších modeloch. Z dát sa obvykle ukazuje negatívna korelácia, čo intuitívne korešponduje s pákovým efektom, zmieneným v oddiele 2.3: kladný pohyb v cene je väčšinou sprevádzaný znížením volatility a naopak.

Najobľúbenejší a najpoužívanejší model so stochastickou volatilitou je dnes už klasický *Hestonov model* (Heston, 1993):

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \,\mathrm{d}t + \sigma_t S_t \,\mathrm{d}W_t, \tag{2.4}$$

$$\mathrm{d}\sigma_t^2 = -\kappa(\sigma_t^2 - \bar{\sigma}^2) \,\mathrm{d}t + \xi \sigma_t \,\mathrm{d}W_t^*, \tag{2.5}$$

kde κ, $\bar{\sigma}^2$, $\xi > 0$ sú parametre. Rovnica (2.5) opäť ako v Hullovom-Whiteovom prípade modeluje nie vlastnú volatilitu σ, ale rozptyl σ^2, už však nie pomocou gBp. Všimnime si najskôr, že parametrizácia driftu zabezpečuje, že proces rozptylu má tendenciu vracať sa k svojej dlhodobej hodnote $\bar{\sigma}^2$: ak $\sigma_t^2 > \bar{\sigma}^2$, má rozptyl záporný drift, ak $\sigma_t^2 < \bar{\sigma}^2$, má drift kladný.[8] Toto je práve jeden z empirických javov pozorovaných na časovej štruktúre implikovanej volatility v oddiele 2.2. Na difúznom člene v rovnici rozptylu (2.5) stojí za pozornosť, že v ňom naopak vystupuje iba neumocnená volatilita σ. To má praktický dôvod pre zjednodušenie

[8] V angličtine sa tejto vlastnosti hovorí „mean-reversion“.

oceňovania. Skutočne, Hestonov model ponúka pre európske opcie vzťah v polouzavretom tvare, čo ho robí veľmi obľúbeným. Limitáciou modelu však je, že aby takto modelovaný rozptyl neklesol do záporných hodnôt, musí byť splnená takzvaná *Fellerova podmienka* (Feller, 1951):

$$2\kappa\bar{\sigma}^2 \geq \xi^2.$$

Rozšírením Hestonovho modelu o skoky v cene, modelované pomocou Poissonovho procesu, je *Batesov SVJ model* (Stochastic Volatility Jump, Bates, 1996). Ďalšie modely so stochastickou volatilitou a ich porovnanie možno nájsť napríklad v článkoch Taylor (1994) a Engle a Patton (2001).

2.6 Modely s frakcionálnou volatilitou

Ďalší smer vývoja určuje otázka prítomnosti dlhej pamäte v cenách akcií. Medzi prvými na túto možnosť poukázal Mandelbrot (1971). Čekal (2012) zhŕňa výsledok neskoršej štúdie Willingera a kol. (Willinger, Taqqu a Teverovsky, 1999) takto:

> „Jejich závěr po podrobnější analýze denních výnosů je, že výnosy dlouhou paměť obsahují s odpovídající hodnotou Hurstova parametru 0.6, ale konstatují, že hodnota parametru je nízká a evidence není dostatečná.“

Boli navrhnuté i modely, ktoré využívajú pre cenu akcie geometrický frakcionálny Brownov pohyb, to jest nahrádzajú Wienerov proces v SDR (1.6) frakcionálnym Brownovym pohybom (viď Čekal, 2012). Rogers (1997) ale ukázal, že v takých modeloch existuje arbitráž.

Väčšie uplatnenie našiel fBp v modelovaní volatility, kde je prítomnosť dlhej pamäte dobre zdokumentovaná (viď Breidt, Crato a de Lima, 1998; Martens, Dijk a Pooter, 2004). Sobotka (2014) pre 90-dňovú realizovanú volatilitu indexu FTSE 100 získal v závislosti od štatistickej metódy odhady Hurstovho parametra v rozsahu 0.80–0.95. Podobne Vilela Mendes a Oliveira (2008, odd. 2) pre svoj trhový model (porov. kap. 4 našej práce) z dát New York Stock Exchange odhadujú Hurstov parameter fBp vo vzorci volatility na 0.80–0.90, ako pre jenotlivé akcie, tak pre index.

Comte a Renault (1998) ako prví modifikovali Hullov-Whiteov model použitím skrátenej verzie fBp (viď proces B^H nižšie) v rovnici volatility. Ich model je špecifikovaný nasledovne:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S_t &= \mu(t, S_t)\, S_t \,\mathrm{d}t + \sigma_t S_t \,\mathrm{d}W_t^1, \\
\mathrm{d}(\log \sigma_t) &= k\ (\theta - \log \sigma_t)\,\mathrm{d}t + \gamma \,\mathrm{d}B_t^H, \\
B_t^H &= \int_0^t \frac{(t-s)^{H-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)}\,\mathrm{d}W_s^2, \qquad H \in (1/2,\, 1),
\end{aligned}$$

kde W^1, W^2 sú Wienerove procesy, k, θ, γ sú parametre modelu a integrál $\int \mathrm{d}B^H$ je definovaný po trajektóriách.

Model s frakcionálnou volatilitou a skokmi v cene aktíva navrhli Sattayatham a Intarasit (2011), jeho aplikáciu na dáta analyzuje Sobotka v citovanej práci.

Iný prístup k modelovaniu volatility skúšajú Vilela Mendes a Oliveira (2008): namiesto SDR používajú explicitný vzorec, v ktorom si vystačia bez stochastického integrálu. Týmto modelom sa budeme podrobnejšie zaoberať v štvrtej kapitole.

Kapitola 3

Viacnásobný stochastický integrál a hermitovské procesy

V tejto kapitole uvedieme niektoré základné prvky Malliavinovho počtu, ktoré nám umožnia definovať triedu takzvaných Hermitovských procesov a stručne pojednať o niektorých ich vlastnostiach. Ako uvidíme v záverečnej kapitole, tie budú v skúmanom trhovom modeli hrať kľúčovú úlohu ako riadiace procesy stochastickej volatility. Osobitne si priblížime dva špeciálne prípady: frakcionálny Brownov pohyb a Rosenblattov proces. Vo výklade o Malliavinovom počte sa prevažne pridŕžame prvej kapitoly monografie Nualart (2005), v pojdenaní o hermitovských procesoch najmä článkov Nualart (2003) a Tudor (2008).

3.1 Izonormálny gaussovský proces a náhodná gaussovská miera

Náš výklad začneme definovaním takzvaného izonormálneho gaussovského procesu na všeobecnom Hilbertovom priestore. Ukážeme, že ak je tento Hilbertov priestor typu $L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$, izonormálny gaussovský proces na ňom indukuje náhodnú mieru. Ešte špeciálnejšie, ak $\mathcal{B}$ je borelovská σ-algebra nad nejakou reálnou množinou, typicky intervalom, možno pomocou tejto náhodnej miery definovať štandardný Wienerov proces. Všeobecnejšie teoretické pozadie nám však umožní v nasledujúcich oddieloch definovať viacnásobný integrál voči náhodnej gaussovskej miere a s jeho pomocou potom hermitovské procesy.

Definícia 3.1. *Majme úplný pravdepodobnostný priestor* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *a reálny separabilný Hilbertov priestor* $(\mathscr{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}, \|\cdot\|_{\mathscr{H}})$. Izonormálny gaussovský proces (IGP), *alebo tiež* gaussovský proces na $\mathscr{H}$, *je gaussovská rodina* $W = \{W(h), h \in \mathscr{H}\}$ *centrovaných náhodných veličín na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, *ktoré spĺňajú*

$$\forall\, h, g \in \mathscr{H} \quad \mathsf{E}[W(h)W(g)] = \langle h, g\rangle_{\mathscr{H}}. \tag{3.1}$$

Poznámka 3.1. Lineárna kombinácia centrovaných gaussovských náhodných veličín je centrovaná a gaussovská. Ďalej zo vzťahu (3.1) máme

$$\begin{aligned}
&\forall\ h, g \in \mathscr{H}, \quad \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\
&\Big\| W(\lambda h + \mu g) \ - \ \big[\lambda W(h) + \mu W(g)\big] \Big\|^2_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})} \\
&\qquad = \mathsf{E}\left[\Big(W(\lambda h + \mu g) \ - \ \big[\lambda W(h) + \mu W(g)\big]\Big)^2\right] \\
&\qquad = \|\lambda h + \mu g\|^2_{\mathscr{H}} \ + \ \lambda^2 \|h\|^2_{\mathscr{H}} \ + \ \mu^2 \|g\|^2_{\mathscr{H}} \\
&\qquad\quad - \ 2\lambda \langle \lambda h + \mu g, h\rangle_{\mathscr{H}} \ - \ 2\mu \langle \lambda h + \mu g, g\rangle_{\mathscr{H}} \ + \ 2\lambda\mu \langle h, g\rangle_{\mathscr{H}} \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}$$

Zobrazenie $h \mapsto W(h)$ je teda lineárna izometria priestoru $\mathscr{H}$ na nejaký uzavretý podpriestor priestoru $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Uvažujme teraz špeciálny prípad, keď $\mathscr{H} = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$, kde $(T, \mathcal{B})$ je merateľný priestor a μ je σ-konečná neatomická miera. Zaveďme značenie

$$\mathcal{B}_0 := \{A \in \mathcal{B} : \mu(A) < \infty\}.$$

Potom izonormálny gaussovský proces $\{\, W(h), h \in L^2(T, \mathcal{B}, \mu) \,\}$ je charakterizovaný rodinou $\{\, W(A) : A \in \mathcal{B}_0 \,\}$, kde $W(A) := W(\mathbb{I}_A)$, v nasledovnom zmysle: Každú funkciu $h \in L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$ možno aproximovať jednoduchými funkciami tvaru $h_n = \sum_{j=1}^n k_j\, \mathbb{I}_{A_j}$, $k_j \in \mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{B}_0$ disjunktné, $n = 1,2,\ldots$ Potom zo spojitosti a linearity zobrazenia $h \mapsto W(h)$ dostávame

$$W(h) = \lim_{n\to\infty} W(h_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} k_j W(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j W(A_j).$$

Ak teraz zavedieme značenie lin pre lineárny obal a cl pre uzáver množiny, môžeme to isté písať formou

$$\Big\{ W(h), h \in L^2(T, \mathcal{B}, \mu) \Big\} \ = \ \mathrm{cl}\Big\{ \mathrm{lin}\{W(A) : A \in \mathcal{B}\} \Big\}.$$

Definícia 3.2. *Majme izonormálny gaussovský proces $W = \{W(h), h \in \mathscr{H}\}$, kde $\mathscr{H} = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$, $(T, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor so σ-konečnou neatomickou mierou.* Náhodnou ($L^2(\Omega)$-hodnotovou) gaussovskou mierou *na $(T, \mathcal{B})$*[1] *nazývame množinovú funkciu*

$$\begin{aligned} W : \mathcal{B}_0 &\to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}), \\ A &\mapsto W(A) := W(\mathbb{I}_A). \end{aligned}$$

Poznámka 3.2.

(i) Gaussovský proces na $L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$ a náhodná gaussovská miera na $(T, \mathcal{B})$ sú ekvivalentné v tom zmysle, že jedno možno definovať pomocou druhého a naopak. Ľahko ich rozlíšime podľa toho, či argumentom je funkcia, alebo množina. Preto oba objekty značíme rovnakým symbolom.

[1] Môžeme sa stretnúť tiež s označením *biely šum založený na miere μ.*

(ii) Hodnoty náhodnej gaussovskej miery W sú náhodné veličiny v $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ s rozdelením $W(A) \sim N\big(0, \mu(A)\big)$, $A \in \mathcal{B}_0$. Ak $A, B \in \mathcal{B}_0$ sú disjunktné, tak $W(A)$ a $W(B)$ sú nezávislé.

(iii) Všimnime si, že W *nie je* systém nezáporných mier indexovaný množinou Ω. Je zrejmé, že $W(A;\omega)$ môže byť záporné. Ďalej pre fixné $\omega \in \Omega$ nie je $W(\bullet;\omega)$ σ-aditívna (znamienková) miera.

Príklad 3.1 (Náhodná gaussovská miera a Wienerov proces na $\mathbb{R}_+$)**.** Označme $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$. Uvažujme špeciálny prípad, keď $T = \mathbb{R}_+$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ je borelovská σ-algebra a μ je zodpovedajúca Lebesgueova miera. Máme teda náhodnú gaussovskú mieru W na merateľnom priestore $\big(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\big)$. Pomocou nej môžeme definovať proces $\widetilde{W} = \{\widetilde{W}(t),\ t \geq 0\}$, kde

$$\widetilde{W}(t) := W\big([0,t]\big).$$

Pre tento proces platí, že pre $\forall\, s,t \in [0,\infty)$ sú $\widetilde{W}(s)$ a $\widetilde{W}(t)$ centrované gaussovské veličiny s kovariančnou funkciou

$$\mathsf{E}\left[\widetilde{W}(s)\widetilde{W}(t)\right] = s \wedge t.$$

Špeciálne $\widetilde{W}(0) \sim N(0,0)$, teda $\widetilde{W}(0) = 0$ s.i. Ďalej pre $\forall\, s,t \geq 0$

$$\mathsf{E}\left[|\widetilde{W}(t) - \widetilde{W}(s)|^2\right] = |t-s|$$

a pre $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$,

$$\mathsf{E}\left[|\widetilde{W}(t) - \widetilde{W}(s)|^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k k!}|t-s|^k,$$

z čoho Kolmogorovov-Čencovov test spojitosti zabezpečuje existenciu spojitej verzie. Ako vidíme, táto spojitá verzia $\widetilde{W}$ je štandardný Wienerov proces.

3.2 Viacnásobný integrál voči náhodnej gaussovskej miere

Zvoľme $m \in \mathbb{N}$ pevné. Uvažujme funkciu $f \in L^2(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)$, kde

$$T^m = \bigtimes_{i=1}^m T, \qquad \mathcal{B}^m = \bigotimes_{i=1}^m \mathcal{B}, \qquad \mu^m = \bigotimes_{i=1}^m \mu.$$

Chceme definovať jej viacnásobný integrál $I_m(f)$ podľa náhodnej gaussovskej miery W. Označme $\mathcal{E}_m$ priestor jednoduchých funkcií $f \in L^2(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)$ tvaru

$$f(t_1,\dots,t_m) = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} a_{i_1\dots i_m}\, \mathbb{I}_{A_{i_1}\times\dots\times A_{i_m}}(t_1,\dots,t_m), \tag{3.2}$$

kde

- $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}_0$ sú po dvoch disjunktné množiny,
- koeficienty $a_{i_1\dots i_m} \in \mathbb{R}$ sú nulové vždy, keď sa aspoň dva z indexov $i_1,\dots,i_m$ rovnajú.

Z podmienky na koeficienty plynie, že $f \equiv 0$ na tých m-rozmerných kvádroch $A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_m} \subset T^m$, ktoré sú pretínané diagonálnymi podpriestormi

$$\Big\{(t_1, \dots, t_m) \in T^m : \exists i \ \neq j \in \{1, \dots, m\}, t_i = t_j\Big\}.$$

Ako ďalej uvidíme, táto vlastnosť umožňuje pri konštrukcii integrálu využiť nezávislosť náhodnej miery na disjunktných množinách.

Teraz zaveďme značenie $\tilde{f}$ pre symetrizáciu funkcie f danú vzťahom

$$\tilde{f}(t_1, \dots, t_m) := \frac{1}{m!} \sum_{\sigma} f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(m)}),$$

kde σ prebieha všetky permutácie indexov $\{\, i_1, \dots, i_m \,\}$. Pre $f \in \mathcal{E}_m$ definujme

$$I_m(f) := \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} a_{i_1 \dots i_m} W(A_{i_1}) \cdots W(A_{i_m}). \tag{3.3}$$

Lema 3.1. *Nech $f \in \mathcal{E}_m$. Integrál $I_m(f)$ definovaný vzťahom (3.3) má nasledujúce vlastnosti:*

(i) *$I_m : \mathcal{E}_m \to L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ je lineárne zobrazenie,*

(ii) *$I_m(f) = I_m(\tilde{f})$,*

(iii) *platí izometria*

$$\Big\langle I_m(f), I_q(g)\Big\rangle_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})} = \mathsf{E}\Big[I_m(f) I_q(g)\Big] = \begin{cases} m!\, \langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle_{L^2(T^m)} & \text{ak } m = q, \\ 0 & \text{ak } m \neq q. \end{cases}$$

Dôkaz.

(i) Zrejmé, pretože I_m je konečná suma.

(ii) Vďaka linearite stačí ukázať pre funkciu

$$f(t_1, \dots, t_m) = \mathbb{I}_{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_m}}(t_1, \dots, t_m),$$

čo je zrejmé z komutatívnosti súčinu, lebo $I_m(f) := W(A_{i_1}) \cdots W(A_{i_m})$.

(iii) Vďaka vlastnosti (ii) stačí uvažovať symetrické funkcie $f \in \mathcal{E}_m$ a $g \in \mathcal{E}_q$. Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme, že obe sa zakladajú na spoločnom delení $\{A_1, \dots, A_n\}$.

Prípad $m \neq q$. Pre jednoduchosť uvažujme $q = m + 1$, $f = \mathbb{I}_{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_m}}$ a $g = \mathbb{I}_{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_m} \times A_{i_{m+1}}}$. Keďže množiny $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_{m+1}}\}$ sú disjunktné, veličina $W(A_{i_{m+1}})$ je centrovaná a nezávislá od $\{W(A_{i_1}), \dots, W(A_{i_m})\}$, takže platí

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[I_m(f) I_q(g)\right] &= \mathsf{E}\Big[W^2(A_{i_1}) \cdots W^2(A_{i_m}) \cdot W(A_{i_{m+1}})\Big] \\ &= \mathsf{E}\Big[W^2(A_{i_1}) \cdots W^2(A_{i_m})\Big] \cdot \mathsf{E}\Big[W(A_{i_{m+1}})\Big] = 0. \end{aligned}$$

Prípad $m = q$. Nech funkcia f je daná vzťahom (3.2) a nech

$$g(t_1, \dots, t_m) = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} b_{i_1 \dots i_m}\, \mathbb{I}_{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_m}}(t_1, \dots, t_m).$$

Potom

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[I_m(f)I_m(g)\right] &= \mathsf{E}\left[\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le n} m!\,a_{i_1\dots i_m}W(A_{i_1})\cdots W(A_{i_m})\right)\right.\\
&\qquad\left.\times\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le n} m!\,b_{i_1\dots i_m}W(A_{i_1})\cdots W(A_{i_m})\right)\right]\\
&= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le n} (m!)^2 a_{i_1\dots i_m}b_{i_1\dots i_m}\mu(A_{i_1})\cdots\mu(A_{i_m})\\
&= m!\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} a_{i_1\dots i_m}b_{i_1\dots i_m}\,\mu^m\left(\bigtimes_{k=1}^{m} A_{i_k}\right)\\
&= m!\,\langle f,g\rangle_{L^2(T^m)}.
\end{aligned}
$$

□

Dôsledok 3.2. *Nech $f\in\mathcal{E}_m$. Integrál $I_m(f)$ je spojitý.*

Dôkaz. Stačí položiť $f=g$ v leme 3.1 (iii) (viď Nualart, 2005, s. 10):

$$
\|I_m(f)\|^2_{L^2(\Omega)} = \mathsf{E}(I_m(f)^2) = m!\,\|\tilde f\|^2_{L^2(T^m)} \le m!\,\|f\|^2_{L^2(T^m)}.
$$

□

Ďalej chceme viacnásobný integrál rozšíriť na celý priestor $L^2(T^m,\mathcal{B}^m,\mu^m)$.

Lema 3.3. *Množina $\mathcal{E}_m$ je hustá v množine všeobecných jednoduchých funkcií, to jest funkcií, ktoré zachovávajú tvar (3.2), ale koeficienty $a_{i_1\dots i_m}\in\mathbb{R}$ nie sú v prípade rovnajúcich sa indexov nutne nulové.*

Dôkaz. Aby sme videli, že množina $\mathcal{E}_m$ je hustá v priestore všeobecných jednoduchých funkcií, stačí ukázať, že indikátor $\mathbb{I}_A$ ľubovoľnej množiny $A=A_1\times\cdots\times A_m$, $A_i\in\mathcal{B}_0$, $i=1,2,\dots,m$, možno aproximovať funkciami z $\mathcal{E}_m$. Zvoľme ľubovoľné $\epsilon>0$. Miera μ je neatomická, čo znamená, že

$$
\forall\, A\ \in\mathcal{B},\ 0<\mu(A)<\infty,\quad \forall\, 0<\gamma<\mu(A)\quad \exists\, B\in\mathcal{B}: B\subset A,\ \mu(B)=\gamma.
$$

Preto možno nájsť systém po dvoch disjunktných množín $\{B_1,\dots,B_n\}\subset\mathcal{B}_0$ takých, že pre $\forall\, i=1,\dots,n$ je $\mu(B_i)<\epsilon$ a každú množinu A_i, $i=1,\dots,m$, možno zapísať ako disjunktné zjednotenie niektorých z množín B_j, $j=1,\dots,n$, pričom $\bigcup_{j=1}^n B_j=\bigcup_{i=1}^m A_i$. Systém $\{B_1,\dots,B_n\}$ je teda jemnejším delením. Všimnime si, že n závisí na zvolenom ϵ. Potom môžeme písať

$$
\mathbb{I}_A = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} \epsilon_{i_1\dots i_m}\,\mathbb{I}_{B_{i_1}\times\cdots\times B_{i_m}},
$$

kde $\epsilon_{i_1\dots i_m}\in\{0,1\}$ podľa toho, ktoré množiny $B_{i_1}\times\cdots\times B_{i_m}$ sú súčasťou rozkladu A. Rozdelíme tento súčet na dve časti. Nech I je množina takých m-tíc $(i_1,\dots,i_m)$, kde sú všetky indexy rôzne. Množinu ostatných m-tíc označme J. Položme $\alpha:=\mu\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right)$ a

$$
\mathbb{I}_B := \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in I} \epsilon_{i_1\dots i_m}\,\mathbb{I}_{B_{i_1}\times\cdots\times B_{i_m}}.
$$

Potom $\mathbb{I}_B \in \mathcal{E}_m$ a platí

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B\|^2_{L^2(T^m)} &= \int_{T^m} \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in J} \epsilon_{i_1\dots i_m}\, \mathbb{I}_{B_{i_1}\times\cdots\times B_{i_m}}\, \mathrm{d}\mu^m \\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in J} \epsilon_{i_1\dots i_m} \mu(B_{i_1})\cdots\mu(B_{i_m}) \\
&\le \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in J} \mu(B_{i_1})\cdots\mu(B_{i_m}) \\
&\le \binom{m}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{(i_1,\dots,i_m)=1}^{n} \mu(B_j)^2 \cdot \mu(B_{i_3})\cdots\mu(B_{i_m}) \\
&= \binom{m}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)^2\right) \left(\sum_{(i_1,\dots,i_m)=1}^{n} \mu(B_{i_3})\cdots\mu(B_{i_m})\right) \\
&= \binom{m}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)\right)^{m-2} \\
&= \binom{m}{2} \sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\mu(B_j)}_{<\epsilon} \cdot \frac{\mu(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)}\right) \cdot \Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)}_{\le\alpha}\Bigg)^{m-1} \\
&< \binom{m}{2} \epsilon \cdot \alpha^{m-1} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0,
\end{aligned}$$

čím je aproximácia $\mathbb{I}_A$ pomocou funkcií z $\mathcal{E}_m$ ukázaná. □

Vieme, že všeobecné jednoduché funkcie sú husté v $L^2(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)$. Ich aproximáciou funkciami z $\mathcal{E}_m$ preto vďaka linearite (lema 3.1 (i)) a spojitosti (dôsledok 3.2) definíciu viacnásobného integrálu podľa gaussovského procesu W danú vzťahom (3.3) možno rozšíriť na ľubovoľné funkcie z $L^2(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)$. Ďalej budeme používať tiež značenie

$$\int_{T^m} f(t_1,\dots,t_m)\, \mathrm{d}W(t_1)\cdots \mathrm{d}W(t_m) := I_m(f).$$

Uvedieme ešte jedno tvrdenie o násobení viacnásobných integrálov, ktoré využijeme v oddiele 3.3. K tomu potrebujeme nasledujúcu definíciu:

Definícia 3.3 (Kontrakcia indexov a tenzorový súčin)**.** *Majme dve symetrické funkcie $f \in L^2(T^p)$ a $g \in L^2(T^q)$, $p, q \in \mathbb{N}$. Potom definujeme*

(i) tenzorový súčin

$$(f \otimes g)(t_1,\dots,t_{p+q}) := f(t_1,\dots,t_p) g(t_{p+1},\dots,t_{p+q}),$$

(ii) kontrakciu r indexov funkcií f a g

$$\begin{aligned}
&(f \otimes_r g)(t_1,\dots,t_{p+q-2r}) \\
&\qquad := \int_{T^r} f(t_1,\dots,t_{p-r},s)\, g(t_{p-r+1},\dots,t_{p+q-2r},s)\, \mathrm{d}\mu^r(s).
\end{aligned}$$

Poznámka 3.3.

(i) Tenzorový súčin a kontrakcia r indexov funkcií f a g, $r = 1, \dots, p \wedge q$, nie sú nutne symetrické funkcie ani ak f a g sú symetrické. Budeme preto ich symetrizácie značiť $(f \tilde{\otimes} g)$ a $(f \tilde{\otimes}_r g)$.

(ii) Všimnime si, že $f \otimes_r g \in L^2(T^{p+q-2r})$.

Tvrdenie 3.4. *Majme symetrickú funkciu $f \in L^2(T^p)$, $p \in \mathbb{N}$, a nech $g \in L^2(T)$. Potom*

$$I_p(f)I_1(g) = I_{p+1}(f \otimes g) + pI_{p-1}(f \otimes_1 g). \tag{3.4}$$

Dôkaz. Viď Nualart s. 11, Prop 1.1.2. □

3.3 Wienerove chaosy

V tomto oddiele pomocou Hermitovych polynómov definujeme podpriestory priestoru $L^2(\Omega)$ nazývané Wienerove chaosy. Ukážeme, že priestor $L^2(\Omega)$ možno rozložiť na ich súčet, a funkcie z tohto rozkladu charakterizujeme pomocou stochastického integrálou definovaného v predchádzajúcom oddiele.

Budeme pracovať s izonormálnym gaussovským procesom W na priestore $\mathscr{H}$. Označme symbolom $\mathcal{G}$ σ-algebru generovanú týmto procesom. Keď budeme hovoriť o priestore $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathsf{P})$, znamená to, že nemáme iný zdroj náhodnosti okrem procesu W.

Definícia 3.4. *Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom polynóm H_n daný vzťahom*

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

*nazveme n-*tým Hermitovym polynómom*. Pre $n = 0$ definujeme $H_n(x) \equiv 1$.*

Pre Hermitove polynómy platia nasledujúce tri základné tvrdenia ($n \geq 1$):

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= H_{n-1}(x), \\ (n+1)H_{n+1}(x) &= xH_n(x) - H_{n-1}(x), \\ H_n(-x) &= (-1)^n H_n(x). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Definícia 3.5. *Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom uzavretý lineárny podpriestor*

$$\mathcal{H}_n := \mathrm{cl}\left\{ \mathrm{lin}\left\{ H_n\Big(W(h)\Big) : \ h \in \mathscr{H}, \ \|h\|_{\mathscr{H}} = 1 \right\} \right\}$$

*priestoru $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ nazveme n-*tým Wienerovym chaosom *(tiež* Wienerovym chaosom n-tého rádu*). Pre $n = 0$ definujme $\mathcal{H}_0 := \{ f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}) : f \equiv \text{konšt.} \}$.*

Poznámka 3.4. Prvý Wienerov chaos splýva s IGP W:

$$\mathcal{H}_1 = \{ W(h), h \in \mathscr{H} \} = W.$$

Lema 3.5. *Majme dve združene gaussovské náhodné veličiny $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $X \sim Y \sim N(0,1)$. Potom $\forall\, n, m \geq 0$*

$$\mathsf{E}[H_m(X)H_n(Y)] = \begin{cases} \frac{1}{n!}(\mathsf{E}[XY])^n & \textit{if } m = n, \\ 0 & \textit{if } m \neq n. \end{cases}$$

Dôkaz. Viď Nualart (2005, Lemma 1.1.1) □

Dôsledok 3.6. *Nech $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, potom podpriestory $\mathcal{H}_m$ a $\mathcal{H}_n$ sú navzájom ortogonálne.*

Z dôsledku 3.6 vyplýva, že lieárny súčet Wienerových chaosov je direktný. Priamo z definície 3.5 je zrejmé, že $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$ je uzavretý lineárny podpriestor priestoru $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathsf{P})$. Platí však aj silnejšie tvrdenie:

Veta 3.7. *Priestor $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathsf{P})$ možno rozložiť na direktný súčet Wienerových chaosov, to jest*

$$L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathsf{P}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n.$$

Dôkaz. Viď Nualart (2005, Theorem 1.1.1). □

Veta 3.7 teda dáva pre $\forall\, F \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathsf{P})$ jednoznačný rozklad

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n, \quad F_n \in \mathcal{H}_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.6}$$

Ďalej smerujeme k tomu, aby sme funkcie F_n nejak bližšie charakterizovali.

Tvrdenie 3.8. *Nech $H_m(x)$ je m-tý Hermitov polynóm, $m \in \mathbb{N}$ a nech $h \in \mathscr{H}$, kde $\mathscr{H} = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$, $\|h\|_{\mathscr{H}} = 1$. Potom*

$$m!\, H_m\big(W(h)\big) = \int_{T^m} h(t_1) \cdots h(t_m)\, \mathrm{d}W(t_1) \cdots \mathrm{d}W(t_m). \tag{3.7}$$

Dôkaz. (Nualart, 2005, Proposition 1.1.4.) Indukciou na $m \in \mathbb{N}$.
Pre $m = 1$ sa rovnosť (3.7) redukuje na

$$W(h) = H_1\big(W(h)\big) = \int_T h(t)\, \mathrm{d}W(t), \quad h \in \mathscr{H} = L^2(T), \tag{3.8}$$

čo je zrejmé priamo z konštrukcie viacnásobného stochastického integrálu vďaka linearite a spojitosti zobrazenia $h \mapsto W(h)$.
Indukčný predpoklad: Nech vzťah (3.7) platí pre $m = 1, 2, \ldots, k$.
Indukčný krok: Označme

$$h^{\otimes m}(t_1, \ldots, t_m) := h(t_1) \cdots h(t_m) \quad h^{\otimes m} \in L^2(T^m). \tag{3.9}$$

Potom

$$\begin{aligned}
I_{m+1}\left(h^{\otimes(m+1)}\right) &\overset{(3.4)}{=} I_m\left(h^{\otimes m}\right) I_1(h) \;-\; m I_{m-1}\Big(\overbrace{h^{\otimes(m-1)} \underbrace{\int_T [h(t)]^2 \,\mathrm{d}\mu(t)}_{=\|h\|^2_{L^2(T)}=1}}^{=h^{\otimes m} \otimes_1 h}\Big) \\
&= m!\, H_m\big(W(h)\big) W(h) \;-\; m(m-1)!\, H_{m-1}\big(W(h)\big) \\
&\overset{(3.5)}{=} m!(m+1) H_{m+1}\big(W(h)\big) \\
&= (m+1)!\, H_{m+1}\big(W(h)\big).
\end{aligned}$$

□

Dôsledok 3.9. *Viacnásobný integrál I_m zobrazuje priestor $L^2(T^m)$ na m-tý Wienerov chaos.*

Dôkaz. Označme

$$L^2_S(T^m) := \{f \in L^2(T^m) : f \text{ symetrická}\}.$$

Je to uzavretý podpriestor priestoru $L^2(T^m)$ a z vlastnosti (ii) v leme 3.1 plynie, že $I_m\Big(L^2(T^m)\Big) = I_m\Big(L^2_S(T^m)\Big)$. Stačí teda ukázať, že $I_m\Big(L^2_S(T^m)\Big) = \mathcal{H}_m$. Z lemy 3.1 (iii) máme, že operátor I_m pre $\forall\, f \in L^2_S(T^m)$ spĺňa vzťah

$$\mathsf{E}(I_m(f)^2) = m!\, \|f\|^2_{L^2(T^m)},$$

teda že je na $L^2_S(T^m)$ spojitý. Obraz $I_m\Big(L^2_S(T^m)\Big)$ uzavretého priestoru $L^2_S(T^m)$ je preto tiež uzavretý. Funkcia $h^{\otimes m}$ daná vzťahom (3.9) je symetrická, takže z rovnosti (3.7) vyplýva, že priestor $I_m\Big(L^2_S(T^m)\Big)$ obsahuje množinu, ktorá generuje $\mathcal{H}_m$ (viď def. 3.5):

$$\Big\{H_m\Big(W(h)\Big) :\ h \in L^2(T),\ \|h\|_{L^2(T)} = 1\Big\} \subset I_m\Big(L^2_S(T^m)\Big)$$

Ale $I_m\Big(L^2_S(T^m)\Big)$ je uzavretý lineárny priestor, preto $\mathcal{H}_m \subset I_m\Big(L^2_S(T^m)\Big)$. Z ortogonality integrálov rôznych rádov, lema 3.1 (iii), ďalej vyplýva, že pre $\forall\, m \neq n$ sú priestory $I_m\Big(L^2_S(T^m)\Big)$ a $\mathcal{H}_n$ ortogonálne, takže ostáva, že $\mathcal{H}_m = I_m\Big(L^2_S(T^m)\Big)$. □

Poznámka 3.5. Vzťah (3.8), ktorý sme videli v priebehu dôkazu tvrdenia 3.8, môžeme chápať ako integrálnu reprezentáciu IGP.

Teraz sme už pripravení vysloviť nasledujúcu dôležitú vetu:

Veta 3.10. *Ľubovoľnú funkciu $F \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathsf{P})$ možno rozložiť do radu viacnásobných stochastických integrálov. Formálne: $\exists\, f_n \in L^2(T^n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$:*

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n),$$

kde $f_0 = \mathsf{E}\, F$ a I_0 chápeme ako identitu na $\mathcal{H}_0$.

Dôkaz. Plynie z vety 3.7 a dôsledku 3.9. □

Poznámka 3.6. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme uvažovať, že funkcie f_n sú symetrické. Potom sú funkciou F určené jednoznačne.

3.4 Vzťah integrálu podľa náhodnej gaussovskej miery k Itoovmu integrálu

V časti 3.3 sme pozorovali, že IGP W na reálnom separabilnom Hilbertovom priestore $\mathscr{H}$ je reprezentovateľný ako stochastický integrál podľa prislúchajúcej náhodnej gaussovskej miery, a že sa teda pohybuje v prvom Wienerovom chaose $\mathcal{H}_1$. Špeciálne nadväzujúc na príklad 3.1, ak uvažujeme $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$, štandardný

Wienerov proces $\widetilde{W}$ na $\mathbb{R}_+$ môžeme reprezentovať ako spojitú verziu stochastického integrálu indikátorov intervalov $\mathbb{I}_{[0,t]} \in \mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$:

$$\int_0^t 1 \, \mathrm{d}\widetilde{W}(s) = \widetilde{W}(t) = W([0,t]) = W(\mathbb{I}_{[0,t]}) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{I}_{[0,t]}(s) \, \mathrm{d}W(s).$$

Na úrovni indikátorov v priestore jednodimenzionálnych funkcií $L^2(\mathbb{R}_+)$ je zrejmé, že v tomto špeciálnom prípade je stochastický integrál definovaný v časti 3.2 totožný s klasickým Itoovym integrálom definovaným na priestore

$$L_a^2\Big(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes \mathsf{P}\Big)$$

adaptovaných procesov kvadraticky integrovateľných podľa súčinovej miery (kde λ je Lebesgueova miera na $\mathbb{R}_+$). Ďalej $L^2(\mathbb{R}_+) \subset L_a^2\big(\mathbb{R}_+ \times \Omega\big)$, lebo každý deterministický proces je adaptovaný. Preto linearitou a limitným prechodom zisťujeme, že IGP W, respektíve integrál podľa náhodnej gaussovskej miery W možno reprezentovať ako *Itoov integrál deterministických funkcií*, respektíve Wienerov integrál, na celom priestore $L^2(\mathbb{R}_+)$:

$$\int_{\mathbb{R}_+} h(s) \, \mathrm{d}W(s) = W(h) = \int_{\mathbb{R}_+} h(s) \, \mathrm{d}\widetilde{W}(s), \quad h \in L^2(\mathbb{R}_+).$$

Analogický vzťah platí aj pre viacnásobný stochastický integrál:

Lema 3.11 (porov. Nualart, 2005, s. 23)**.** *Majme interval* $[0,T] \subset (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})$ *a deterministickú funkciu* $f_n \in L^2([0,T]^n)$*. Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme* f_n *symetrickú. Potom platí*

$$\begin{aligned} I_n(f_n) &= \int_0^T \left(\int_0^T \cdots \left(\int_0^T f_n(t_1, \ldots, t_n) \, \mathrm{d}\widetilde{W}_{t_1} \right) \cdots \mathrm{d}\widetilde{W}_{t_{n-1}} \right) \mathrm{d}\widetilde{W}_{t_n} \\ &= n! \int_0^T \left(\int_0^{t_n} \cdots \left(\int_0^{t_2} f_n(t_1, \ldots, t_n) \, \mathrm{d}\widetilde{W}_{t_1} \right) \cdots \mathrm{d}\widetilde{W}_{t_{n-1}} \right) \mathrm{d}\widetilde{W}_{t_n}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

kde na ľavej strane je viacnásobný integrál podľa IGP $\{W(h),\, h \in L^2([0,T])\}$ *a na pravej strane iterovaný Itoov integrál typu* $\int_0^\bullet g_s \, \mathrm{d}\widetilde{W}_s$, $g \in L^2([0,T] \times \Omega)$, *(chápaný ako funkcia hornej hranice) podľa bežného jednorozmerného Wienerovho procesu* $\{\widetilde{W}_t,\, t \in [0,T]\}$.

Dôkaz. Prvá rovnosť vo vzťahu (3.10) je na úrovni indikátorov z priestoru $\mathcal{E}_n$ zrejmá z definície oboch integrálov. Na celý priestor $L^2([0,T]^n)$ sa rozšíri aproximáciou analogicky postupu z oddielu , ak si uvedomíme, že pre funkcie z $L^2([0,T]^n)$ je izometria viacnásobného integrálu (tvrdenie (iii) lemy 3.1) totožná s Itoovou izometriou. Druhá rovnosť plynie ihneď zo symetrie funkcie f_n. □

Zdôraznime ešte, že iterovaný Itoov integrál vo vzťahu (3.10) je integrovaný n krát podľa *toho istého* Wienerovho procesu, nie podľa n jeho nezávislých kópií.

3.5 Hermitovské procesy

Teraz sme dokončili výklad o viacnásobnom integrále a sme pripravení pristúpiť k definovaniu Hermitovských procesov. Ide o triedu sebepodobných procesov (viď napr. Taqqu, 1986; Samorodnitsky a Taqqu, 1994; Embrechts a Maejima, 2002), ktoré vznikajú ako limity v takzvanej *necentrálnej limitnej vete* (viď napr. Dobrushin a Major, 1979 alebo Taqqu, 1979). Stručne tu zhrnieme ich hlavné charakteristiky a predstavíme frakcionálny Brownov pohyb a Rosenblattov proces, dva základné a najviac študované príklady. Najmä prvý z nich bude pre nás dôležitý v záverečnej kapitole. V tomto oddiele čerpáme predovšetkým z článku Tudor (2008), ďalej pri výklade o Hermitovej hodnosti z monografie Beran (1994, kap. 3), poznatky o fBp prevažne z príspevku Nualart (2003).

Začnime uvedením do kontextu necentrálnej limitnej vety. Označme

$$\mathscr{G} := \Big\{ g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}) : \ \mathsf{E}[g(X)] = 0, \ \mathsf{E}[g^2(X)] < \infty, \ X \sim N(0,1) \Big\}.$$

Všimnime si, že náhodnú veličinu $X \sim N(0,1)$ môžeme chápať ako súčasť nejakého IGP, $X = W(h)$, $h \in \mathscr{H}$, $\|h\|_{\mathscr{H}} = 1$, takže ak $g \in \mathscr{G}$, náhodné veličiny $g(X)$ sú prvkami $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ a platí pre ne rozklad (3.6). V tomto prípade však máme aj konkrétnejší výsledok:

Lema 3.12 (Beran, 1994, str. 68)**.** *Pre* $\forall\, g \in \mathscr{G}$ *a pre* $\forall\, X \sim N(0,1)$ *existujú takzvané* Hermitove koeficienty $\{a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$ *také, že*

$$g(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k H_k(X), \tag{3.11}$$

kde H_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *sú Hermitove polynómy a platí*

$$a_k = k! \Big\langle g(X), H_k(X) \Big\rangle_{L^2(\Omega)}, \quad X \sim N(0,1). \tag{3.12}$$

Všimnime si, že vzťah (3.12) vyplýva z lemy 3.5.

Definícia 3.6. *Majme* $g \in \mathscr{G}$ *a* $m \in \mathbb{N}$. *Hovoríme, že funkcia* g *má* Hermitovu hodnosť[2] m, *ak pre Hermitove koeficienty z rozkladu* (3.11) *platí, že* $a_m \neq 0$ *a pre všetky* $k < m$ $a_k = 0$.

Je zrejmé, že Hermitova hodnosť je vždy $m \geq 1$, lebo $H_0(x) \equiv 1$ a pre $g \in \mathscr{G}$ platí $\mathsf{E}[g(X)] = 0$.

Majme teraz stacionárnu gaussovskú postupnosť $(\xi_n, n \in \mathbb{Z})$ normovaných náhodných veličín, to jest centrovaných s jednotkovým rozptylom, s autokorelačnou funkciou

$$r(n) := \mathsf{E}[\xi_0 \xi_n] = n^{\frac{2H-2}{k}} L(n),$$

kde $H \in (1/2, 1)$ a L je pomaly sa meniaca funkcia v nekonečne[3], – to jest kladná reálna merateľná funkcia na zdola ohraničenom intervale $[A, +\infty)$, $A > 0$, taká, že pre $\forall\, \lambda > 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1$$

(viď napr. Embrechts a Maejima, 2002; Bojanic a Seneta, 1971). Nech $g \in \mathscr{G}$ má Hermitovu hodnosť k. Potom podľa necentrálnej limitnej vety

$$\frac{1}{n^H} \sum_{j=1}^{[nt]} g(\xi_j) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathrm{d}} Z_H^k(t),$$

[2] Anglicky „Hermite rank“.
[3] Anglicky „slowly varying function at infinity“.

kde symbol $\xrightarrow{\text{d}}$ značí konvergenciu v zmysle všetkých konečnorozmerných rozdelení a $Z_H^k(t)$ je takzvaný hermitovský proces:

Definícia 3.7. *Nech $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, $k \in \mathbb{N}$ a $W = \{W_y, y \in \mathbb{R}\}$ je obojstranný Wienerov proces, to jest*

$$W_y = \begin{cases} W'_y, & y \geq 0, \\ W''_{-y}, & y < 0, \end{cases}$$

kde W' a W'' sú nezávislé Wienerove procesy. Hermitovským procesom (k-teho rádu) *nazývame proces Z_H^k tvaru*

$$Z_H^k(t) := c(H,k) \int\cdots\int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_0^t \left(\prod_{j=1}^k (s - y_j)_+^{-(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{k})} \right) \mathrm{d}s \right] \mathrm{d}W_{y_1} \cdots \mathrm{d}W_{y_k}, \tag{3.13}$$

kde

- $x_+ := \max(x, 0)$,
- *stochastický integrál chápeme v zmysle k-násobného integrálu podľa IGP na $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, respektíve ako iterovaný Itoov integrál, viď lema 3.11,*
- *$c(H,k) > 0$ je normalizačná konštanta volená tak, aby $\mathsf{E}[(Z_H^k(1))^2] = 1$.*

Z dôsledku 3.9 vidíme, že hermitovský proces Z_H^k sa pohybuje v k-tom Wienerovom chaose. Podľa vety 3.7 potom pre $\forall\, k \in \mathbb{N}$ a pre $\forall\, t \geq 0$ $Z_H^k(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathsf{P})$, takže hermitovské procesy majú konečný rozptyl. Okrem toho je známe, že majú stacionárne prírastky sú H-sebepodobné v zmysle

$$\forall\, c > 0 \quad \left\{ Z_H^k(ct) \right\}_{t \geq 0} \overset{(\text{d})}{=} \left\{ c^H Z_H^k(t) \right\}_{t \geq 0}, \tag{3.14}$$

kde symbol $\overset{(\text{d})}{=}$ značí rovnosť všetkých konečnorozmerných rozdelení. V nasledujúcich častiach uvedieme dva významné príklady z triedy hermitovských procesov, frakcionálny Brownov pohyb ($k = 1$) a Rosenblattov proces ($k = 2$).

3.6 Frakcionálny Brownov pohyb

Voľbou $k = 1$ v definícií 3.7 dostávame ako špeciálny prípad hermitovský proces v prvom Wienerovom chaose, známy ako frakcionálny Brownov pohyb (fBp), označme ho $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$:

$$\begin{aligned} B_t^H &:= c(H) \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^t \left((s - y)_+^{(H - \frac{3}{2})} \right) \mathrm{d}s \right] \mathrm{d}W(y) \\ &= c(H) \int_{\mathbb{R}} \left[(t - y)_+^{H - \frac{1}{2}} - (-y)_+^{H - \frac{1}{2}} \right] \mathrm{d}W(y). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Frakcionálny Brownov pohyb zaviedol ako prvý Kolmogorov (1940), neskôr ho výrazne spopularizovali Mandelbrot a Van Ness (1968), ktorí tiež ukázali integrálnu reprezentáciu (3.15). Z nej vidíme, že ide o klasický jednorozmerný Itoov integrál deterministickej funkcie (t. j. Wienerov integrál), takže je zrejmé, že fBp je – ako jediný z rodiny hermitovských procesov – *gaussovský*. Preto ho možno definovať alternatívne pomocou momentov takto:

Definícia 3.8. *Majme* $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. Frakcionálnym Brownovým pohybom *s Hurstovym parametrom* H *nazývame centrovaný gaussovský proces* $B^H = \{B^H(t), t \geq 0\}$ *s autokovariančnou funkciou*

$$R_H(t,s) = \mathsf{E}\Big[B_t^H B_s^H\Big] = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\right). \tag{3.16}$$

Poznámka 3.7. Týmto spôsobom možno fBp definovať aj pre $H \in (0,1)$. Pri práci s ním sa však aj tak musia rozlišovať prípady $H < 1/2$, $H > 1/2$ a $H = 1/2$, čo je práve štandardný Wienerov proces. Keďže pre aplikácie vo finančnej matematike sú zaujímavé fBp s Hurstovym parametrom blízkym 1, budeme ďalej uvažovať len prípad $H > 1/2$, pokiaľ nie je explicitne uvedené inak.

Z definície 3.8 vyplýva, že prírastky fBp sú centrované gaussovské náhodné veličiny s rozptylom

$$\mathsf{E}\left[|B_t^H - B_s^H|^2\right] = |t-s|^{2H}, \tag{3.17}$$

teda sú stacionárne. Zo vzťahu (3.17) ďalej pomocou Kolmogorovovho-Čencovovho testu spojitosti vyplýva existencia spojitej verzie. Naviac platí, že pre $\forall\, \epsilon > 0$, $\forall\, T > 0$ existuje náhodná veličina $G_{\epsilon,T}$ taká, že pre $\forall\, p \geq 1$ je $\mathsf{E}\left[|G_{\epsilon,T}|^p\right] < \infty$ a pre $\forall\, s,t \in [0,T]$

$$|B_t^H - B_s^H| \leq G_{\epsilon,T}|t-s|^{H-\epsilon}.$$

To znamená, že fBp B^H má α-hölderovsky spojité trajektórie pre $\forall\, \alpha \in (0,H)$.

Prírastky fBp cez disjunktné intervaly však na rozdiel od klasického Wienerovho procesu nie sú nezávislé. Vezmime prírastky $\left(B_{t+h}^H - B_t^H\right)$ a $\left(B_{s+h}^H - B_s^H\right)$, kde $t - s = nh$; $s,t,h \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ich kovariancia je

$$\begin{aligned}\rho_H(n) &= \frac{1}{2}h^{2H}\left((n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}\right) \\ &\approx h^{2H}H(2H-1)n^{2H-2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Pre $H > 1/2$ máme $\rho_H(n) > 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\rho_H(n) = \infty$. Hovoríme, že proces vykazuje takzvanú *dlhú pamäť*[4], alebo *agregačné správanie*[5].

Integrál vo vzťahu (3.15) prechádza celú reálnu os. Na ohraničenom intervale však platí aj nasledujúca integrálna reprezentácia fBp formou Volterrovského procesu (viď napr. Alòs a Nualart, 2003):

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t,s)\dot{\mathrm{W}}_s, \qquad t \in [0,T], \tag{3.18}$$

kde jadro (t.j. integrand) K_H má tvar

$$K_H(t,s) = c_H\, s^{\frac{1}{2}-H}\int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}}u^{H-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u, \quad s < t, \tag{3.19}$$

[4] Anglicky „long-range dependence“ alebo „long memory“. Dôkladnú analýzu fenoménu dlhej pamäti možno nájsť napr. v článku Samorodnitsky (2006), pre stručný úvod do problematiky v českom jazyku a prehľad literatúry pozri Čekal (2012).

[5] Anglicky „aggregation behaviour“, viď napr. Nualart (2003). Termín odkazuje na fakt, že jav dlhej pamäti vzniká agregáciou stochastických procesov, či náhodných chýb, viď Čekal (2012).

a značiac beta funkciu symbolom B,

$$c_H^2 = \frac{H(2H-1)}{\mathrm{B}\left(2-2H, H-\frac{1}{2}\right)}.$$

Wienerov proces je vzťahom (3.18) daný jednoznačne a procesy W a B^H generujú tú istú filtráciu.

Zo známych poznatkov o fBp spomeňme ešte, že to nie je semimartingal (viď napr. Rogers, 1997). Je však možné ho aproximovať postupnosťou semimartingalov (viď napr. Androshchuk a Mishura, 2006; Biagini, Campanino a Fuschini, 2008; Nualart, Mazet a Alòs, 2001).

3.7 Rosenblattov proces

Voľbou $k = 2$ vo vzťahu 3.7 dostávame ďalší z triedy hermitovských procesov, takzvaný Rosenblattov proces:

$$Z_t^H := Z_H^2(t) = a_H \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^t (s-y_1)_+^{-\frac{2-H}{2}} (s-y_2)_+^{-\frac{2-H}{2}} \, \mathrm{d}s \right] \mathrm{d}W_{y_1} \, \mathrm{d}W_{y_2}. \tag{3.20}$$

Normovacia konštanta a_H je volená tak, aby platilo $\mathsf{E}\left[(Z_1^H)^2\right] = 1$, konkrétne

$$a_H^2 = \frac{2H(2H-1)}{\left[\mathrm{B}(\frac{H}{2}, H-1)\right]^2},$$

kde B je beta funkcia (viď Tudor, 2008; Maejima a Tudor, 2007).

Rosenblattov proces dedí z triedy hermitovských procesov H-sebepodobnosť a stacionaritu prírastkov, má δ-hölderovskú verziu pre $\forall\, \delta < H$ a pre $H \in (1/2, 1)$ má dlhú pamäť. Na rozdiel od fBp však nie je gaussovský, pretože je daný ako dvojnásobný stochastický integrál.

Analogicky vzťahu (3.18) pre fBp možno i Rosenblattov proces reprezentovať formou integrálu na ohraničenom intervale. Tudor (2008, Proposition 2) podáva dôkaz nasledujúceho tvrdenia:

Tvrdenie 3.13. *Majme Rosenblattov proces $\{Z_t, t \in [0,T]\}$. Nech K je jadro dané vzťahom (3.19). Potom platí*

$$Z_t^H \overset{(\mathrm{d})}{=} d_H \int_0^t \int_0^t \left[\int_{y_1 \vee y_2}^t \frac{\partial K_{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K_{H'}}{\partial u}(u, y_2) \, \mathrm{d}u \right] \mathrm{d}W_{y_1} \, \mathrm{d}W_{y_2}, \tag{3.21}$$

kde $\{W_t, t \in [0,T]\}$ je Wienerov proces a konštanty sú

$$H' = \frac{H+1}{2}$$

a

$$d_H = \frac{1}{H+1} \sqrt{\frac{2(2H-1)}{H}}.$$

Normovacia konštanta d_H je volená tak, aby autokovariančná funkcia bola (3.16)

$$R_H(t,s) = \mathsf{E}\Big[Z_t^H Z_s^H\Big] = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\right),$$

rovnako ako v prípade fBp, čo sa overí priamym výpočtom zo vzťahu (3.21):

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\Big[Z_t^H Z_s^H\Big] \\
&\quad = 2d_H^2 \int_0^{t\wedge s}\int_0^{t\wedge s} \mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 \\
&\quad\quad \times \left(\int_{y_1\vee y_2}^t \int_{y_1\vee y_2}^s \frac{\partial K_{H'}}{\partial u}(u,y_1)\frac{\partial K_{H'}}{\partial u}(u,y_2)\frac{\partial K_{H'}}{\partial v}(v,y_1)\frac{\partial K_{H'}}{\partial v}(v,y_2)\,\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\right) \\
&\quad = 2d_H^2 \int_0^t\int_0^s \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \left(\int_0^{u\vee v}\frac{\partial K_{H'}}{\partial u}(u,y_1)\frac{\partial K_{H'}}{\partial v}(v,y_1)\,\mathrm{d}y_1\right)^2 \\
&\quad = 2d_H^2(H'\,H)^2 \int_0^t\int_0^s |u-v|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \ = R_H(t,s).
\end{aligned}$$

Stacionarita prírastkov a dlhá pamäť potom plynú z tvaru autokovariančnej funkcie rovnako, ako pri fBp.

Integrálna reprezentácia (3.21) tiež uľahčí overenie sebepodobnosti: ak uvážime

$$W_{cy} \overset{(\mathrm{d})}{=} c^{\frac{1}{2}} W_y, \qquad \frac{\partial K_{H'}}{\partial u}(cu, cy_i) = c^{H'-\frac{3}{2}}\frac{\partial K_{H'}}{\partial u}(u,y_i), \qquad i = 1,2,$$

dostaneme

$$\begin{aligned}
Z_{ct}^H &= d_H \int_0^{ct}\int_0^{ct}\left[\int_{y_1\vee y_2}^{ct}\frac{\partial K_{H'}}{\partial u}(u,y_1)\frac{\partial K_{H'}}{\partial u}(u,y_2)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}W_{y_1}\,\mathrm{d}W_{y_2} \\
&= d_H \int_0^{ct}\int_0^{ct}\left[\int_{\frac{y_1}{c}\vee\frac{y_2}{c}}^{t}\frac{\partial K_{H'}}{\partial u}(cu,y_1)\frac{\partial K_{H'}}{\partial u}(cu,y_2)c\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}W_{y_1}\,\mathrm{d}W_{y_2} \\
&= d_H \int_0^{t}\int_0^{t}\left[\int_{y_1\vee y_2}^{t}\frac{\partial K_{H'}}{\partial u}(cu,cy_1)\frac{\partial K_{H'}}{\partial u}(cu,cy_2)c\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}W_{cy_1}\,\mathrm{d}W_{cy_2} \overset{(\mathrm{d})}{=} c^H Z_t^H.
\end{aligned}$$

Tudor (2008, Proposition 2) ďalej ukazuje, že podobne ako fBp, ani Rosenblattov proces nie je semimartingal, môže však nimi byť aproximovaný.

Kapitola 4

Vilela Mendesov model s frakcionálnou volatilitou

V tejto kapitole vyložíme model s frakcionálnou stochastickou volatilitou predstavený v niekoľkých článkoch kolektívu okolo Rui Vilela Mendesa, predovšetkým Vilela Mendes a Oliveira (2008) a Vilela Mendes, Oliveira a Rodrigues (2015).[1] Ide o trhový model so stochastickou volatilitou, kde riadiaci proces volatility je fBp. Špecifickosť ich prístupu je v tom, že volatilita je daná explicitne v uzavretom tvare, nie stochastickým diferenciálom. V našom výklade chceme predovšetkým zdôrazniť, že argumentácií Vilela Mendesa a kol. z matematického hľadiska vyhovuje celá trieda hermitovských procesov a že teda nie je zrejmý dôvod obmedziť sa na fBp. V tom spočíva hlavný prínos našej práce.

4.1 Predpoklady

Konštrukciu modelu začneme uvedením predpokladov, z ktorých vychádzame. Zaveďme značenie $\overline{\{\mathcal{F}_t\}}_{t\geq 0}$ pre obohatenú filtráciu $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

(SP) Uvažujeme súčinovú stochastickú bázu

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P}) := (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}^1 \otimes \mathcal{F}^2, \overline{\{\mathcal{F}_t^1 \otimes \mathcal{F}_t^2\}}_{t\geq 0}, \mathsf{P}_1 \otimes \mathsf{P}_2),$$

kde $\mathbb{F}^1 := \overline{\{\mathcal{F}_t^1, t \geq 0\}}$ a $\mathbb{F}^2 := \overline{\{\mathcal{F}_t^2, t \geq 0\}}$ sú filtrácie na pravdepodobnostných priestoroch $(\Omega_1, \mathcal{F}^1, \mathsf{P}_1)$ a $(\Omega_2, \mathcal{F}^2, \mathsf{P}_2)$.

(SD) Proces ceny aktíva $S = \{S_t(\bullet, \omega_2),\ t \in [0,T]\}$ zúžený na pravdepodobnostný priestor $(\Omega_1, \mathcal{F}^1, \mathsf{P}_1)$ je pre každé pevné $\omega_2 \in \Omega_2$ zovšeobecnený geometrický Brownov pohyb (viď odd. 1.1)

$$\mathrm{d}S_t = \mu_t S_t \,\mathrm{d}t + \sigma_t S_t \,\mathrm{d}W_t \quad \mathsf{P}_1\text{-s.i.}, \quad t \in [0,T] \tag{4.1}$$

kde

- $T > 0$ je investičný horizont, $S_0 = s_0 \in \mathbb{R}$,
- $\{\mu_t(\bullet, \omega_2)\}$, $\{\sigma_t(\bullet, \omega_2)\} \in L^2([0,T] \times \Omega_1)$ sú $\mathbb{F}^1$-progresívne procesy,
- $\{W_t(\bullet, \omega_2)\}$ je klasický $\mathbb{F}^1$-Wienerov proces na $[0,T] \times \Omega_1$.

[1] Pretože všetky tieto články predstavujú z hľadiska obsahu jedinú prácu skúmajúcu ten istý model, pokiaľ nebude potrebné špecifikovať konkrétnu časť textu, budeme na ne odkazovať súhrnne formuláciou „Vilela Mendes a kol.“ bez uvedenia roku.

Poznámka 4.1. Ako minimálny predpoklad by v (SD) postačilo mať integrovateľnosť $\{\mu_t(\bullet, \omega_2)\} \in L^1([0,T])$ a $\{\sigma_t(\bullet, \omega_2)\} \in L^2([0,T])$ P_1-s.i. Na zabezpečenie neprípustnosti arbitráže, čo je základná podmienka zmysluplnosti trhového modelu, však potrebujeme kvadratickú integrovateľnosť driftu, aby sme mohli použiť Girsanovovu vetu. Ďalej, aby malo zmysel interpretovať σ ako volatilitu, chceme, aby proces $\log S$ mal konečné druhé momenty, viď vzťah (4.2). Preto predpokladáme $\{\mu_t(\bullet, \omega_2)\}$, $\{\sigma_t(\bullet, \omega_2)\} \in L^2([0,T] \times \Omega_1)$.

4.2 Indukovaná volatilita

Na základe uvedených predpokladov môžno cenu aktíva S modelovať pomocou rovnice (4.1). Ďalším krokom k formulácií modelu je nájsť vhodný vzťah pre proces volatility $\{\sigma_t\}$. Vilela Mendes a Oliveira (2008) ho nazývajú *indukovanou volatilitou*, lebo ho odvádzajú zo štatistických charakteristík pozorovaných na reálnych dátach. Zhrnieme tu ich postup.

Vychádzajúc zo známeho vzťahu pre interpretáciu volatility z hľadiska teórie stochastických diferenciálnych rovníc

$$\sigma_t^2(\bullet, \omega_2) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}\left[(\log S_{t+\epsilon}(\bullet, \omega_2) - \log S_t(\bullet, \omega_2))^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_t^1 \right], \quad \omega_2 \in \Omega_2, \tag{4.2}$$

Vilela Mendes a Oliveira (2008) empirickou analýzou historických dát z New York Stock Exchange (vyrovnaných odstránením trendu, viď Vilela Mendes, Lima a Araújo, 2002) prichádzajú k záveru, že volatilitu vhodne popisuje nasledujúci vzťah pre empirickú integrovanú logaritmickú volatilitu (porov. Taqqu, Teverovsky a Willinger, 1995):

$$\delta \sum_{n=1}^{t/\delta} \log(\hat{\sigma}_{n\delta}) = \beta t + R_\sigma(t), \tag{4.3}$$

kde

- $\delta \in \mathbb{N}$ malé značí veľkosť časového kroku, napr. $\delta = 1$ pre denné dáta,
- $t = k\delta$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$,
- $\beta \in \mathbb{R}$, konšt.,
- $\hat{\sigma}$ je časový rad empirických odhadov lokálnej volatility,
- R_σ je časový rad vykazujúci vlastnosť *sebepodobnosti*.

Preto navrhujú nasledujúci tvar procesu logaritmickej volatility:

$$\log \sigma_t = \beta + \frac{1}{\delta}(R_\sigma(t) - R_\sigma(t-\delta)). \tag{4.4}$$

Teraz ostáva bližšie charakterizovať proces R_σ. Je známe (viď napr. Embrechts a Maejima, 2002), že ak nedegenerovaný proces $X = \{X_t, t \geq 0\}$

(i) má konečný rozptyl,
(ii) má stacionárne prírastky,
(iii) je H-sebepodobný v zmysle vzťahu (3.14),

tak musí mať kovariančnú štruktúru

$$\operatorname{cov}(X_s, X_t) = \frac{1}{2}\Big(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}\Big)\,\mathsf{E}\Big(X_1^2\Big). \tag{4.5}$$

Vilela Mendes a kol. teda volia za R_σ vhodne škálovaný fBp B^H:

$$R_\sigma(t) := k\ B^H(t), t \geq 0.$$

Z definície 3.8 je jasné, že fBp vzťah (4.5) spĺňa. Zrejme má zmysel uvažovať $k > 0$. Vilela Mendes a kol. uvázdajú, že z dát odhadli Hurstov parameter $H \simeq 0.8$.

Poznámka 4.2. Ak uvažujeme o procese volatility, vlastnosť (i) je nutná pre zmysluplnosť modelu so stochastickou volatilitou a vlastnosť (ii) je prirodzená, pretože modelujeme šum. Rozhodujúce je teda empirické zistenie, že proces R_σ vo vzťahu (4.3) je sebepodobný, čo sa do formulácie predpokladov premietne cez kovariančnú funkciu (4.5).

Všimnime si ďalej, že podmienky (i)–(iii) sú splnené, a teda argument Vilela Mendesa a kol. o súlade s empirickými dátami ostáva v platnosti, ak za R_σ zvolíme *ľubovoľný hermitovský proces.* V nasledujúcich oddieloch budeme skúmať, nakoľko je voľba fBp rozhodujúca pre matematickú konzistentnosť modelu.

4.3 Matematická formulácia Vilela Mendesovho modelu

Poznatky z predchádzajúcich dvoch oddielov môžeme zhrnúť v nasledujúcej definícií:

Definícia 4.1. *Majme stochastickú bázu*

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P}) := (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}^1 \otimes \mathcal{F}^2, \overline{\{\mathcal{F}^1_t \otimes \mathcal{F}^2_t\}}, \mathsf{P}_1 \otimes \mathsf{P}_2)$$

spĺňajúcu predpoklad (SP). Uvažujme investičný horizont $T > 0$, $t \in [0, T]$. Nech sú dané parametre $\delta \in \mathbb{N}$, $k > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ a $H \in (1/2, 1)$. Majme na priestore $[0, T] \times \Omega$ nasledujúce procesy:

- $\mu \ = \{\mu_t(\omega_1, \omega_2)\} \in L^2([0, T] \times \Omega_1)$ P_2*-s.i., $\mathbb{F}$-progresívne merateľný,*
- $W \ = \{W_t(\omega_1, \omega_2)\}$ *štandardný $\mathbb{F}$-Wienerov,*
- $Z^H = \{Z^H_t(\omega_1, \omega_2)\}$ *$\mathbb{F}$-progresívne merateľný hermitovský proces s Hurstovym parametrom H.*

Vilela Mendesovym (VM) modelom *nazveme trhový model so stochastickou volatilitou daný vzťahmi*

$$\mathrm{d}S_t(\omega_1, \omega_2) = \mu_t S_t(\omega_1, \omega_2)\,\mathrm{d}t\ +\ \sigma_t(\omega_1, \omega_2) S_t(\omega_1, \omega_2)\,\mathrm{d}W_t \quad \mathsf{P}\text{-}s.i., \tag{4.6}$$

$$\log \sigma_t(\omega_1, \omega_2) = \beta + \frac{k}{\delta}\left[Z^H_t - Z^H_{t-\delta}\right], \tag{4.7}$$

$$\mathrm{d}D_t = -r D_t\,\mathrm{d}t, \qquad D_0 = 1, \tag{4.8}$$

kde je

- $\{S_t(\omega_1, \omega_2)\}$ *proces predstavujúci cenu aktíva, $S_0 = s_0 \in \mathbb{R}$,*
- $\{\sigma_t(\omega_1, \omega_2)\}$ *proces okamžitej volatility*[2]*,*
- $\{D_t\}$ *deterministický diskontný proces,*
- $r \in \mathbb{R}$ *bezriziková úroková miera.*

[2] Anglicky „instantaneous volatility“.

Poznámka 4.3. Keďže hermitovské procesy sú spojité na $[0, +\infty)$, je zrejmé, že proces σ daný vzťahom (4.7) je na kompaktnom intervale $[0, T]$ spojitý, a teda ohraničený, čiže $\sigma \in L^\infty([0,T])$ P-s.i. Spolu s predpokladom $\mu \in L^2([0,T] \times \Omega_1)$ P_2-s.i. to zabezpečí, že rovnica (4.6) má riešenie, a použitím Itoovho vzorca sa ľahko overí, že model možno ekvivalentne písať v explicitnom tvare

$$S_t = S_0 \exp\left\{\int_0^t \left(\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right) \mathrm{d}s \ + \int_0^t \sigma_s \,\mathrm{d}W_s\right\}, \tag{4.9}$$

$$\sigma_t = \exp\left\{\beta + \frac{k}{\delta}\left[Z_t^H - Z_{t-\delta}^H\right]\right\} \quad (> 0), \tag{4.10}$$

$$D_t = \mathrm{e}^{-rt}. \tag{4.11}$$

Poznámka 4.4. Všimnime si, že v rovnici volatility (4.10) nevystupuje integrál voči hermitovskému procesu, resp. fBp ako v skoršie navrhnutých modeloch s frakcionálnou volatilitou (viď napr. Comte a Renault, 1998, tiež odd. 2.6 našej práce). Namiesto toho máme výraz aproximujúci deriváciu:

$$\frac{1}{\delta}\left[Z_t^H - Z_{t-\delta}^H\right]. \tag{4.12}$$

Limita pre $\delta \to 0$ však v prípade fBp neexistuje, pretože jeho trajektórie nie sú diferencovateľné.

Príklad 4.1 (Nezávislé zdroje šumu)**.** Definícia 4.1 nestanovuje žiadne podmienky na vzájomnú závislostnú štruktúru procesov W a Z^H. Predpoklad (SP) však umožňuje jednoducho pracovať s prípadom, keď sú nezávislé. Bez ujmy na všeobecnosti v takom prípade možno predpokladať, že máme

- $\{W_t^*\}$ štandardný Wienerov proces na $[0,T] \times \Omega_1$,
- $\left\{Z_t^{H*}\right\}$ hermitovský proces s Hurstovym parametrom H na $[0,T] \times \Omega_2$,

a že pre $\forall\,(t, \omega_1, \omega_2) \in [0,T] \times \Omega_1 \times \Omega_2$

- $W_t(\omega_1, \omega_2) = W_t^*(\omega_1)$,
- $Z_t^H(\omega_1, \omega_2) = Z_t^{H*}(\omega_2)$.

Potom je zrejmé, že štandardný Wienerov proces $W = \{W_t\}$ a hermitovský proces $Z^H = \{Z_t^H\}$ s Hurstovym parametrom H sú na stochastickej báze $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$ danej predpokladom (SP) nezávislé.

4.4 Vilela Mendesov model s frakcionálnym Brownovym pohybom

V oddiele 4.2 sme zmienili, že Vilela Mendes a kol. vo svojej práci volia konkrétny hermitovský proces, fBp. Uvedieme tu preto niekoľko poznámok týkajúcich sa špecificky tohto prípadu (viď Vilela Mendes a kol., 2015).

Zo vzťahu (4.7) ihneď plynie, že ak za Z^H zvolíme fBp, budeme ho ďalej značiť B^H, proces logaritmickej volatility $\log \sigma$ je gaussovský. Pripomeňme, že momentová vytvárajúca funkcia normovanej gaussovskej veličiny X je

$$\mathsf{E}\left[\mathrm{e}^{cX}\right] = \exp\left\{\frac{1}{2}c^2\right\}.$$

Z toho vidno, že rovnicu pre volatilitu možno ekvivalentne vzťahu (4.10) písať v tvare zdôrazňujúcom *konštantnú strednú hodnotu*

$$\sigma_t = \theta \exp\left\{\frac{k}{\delta}\left[B_t^H - B_{t-\delta}^H\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 \delta^{2H}\right\}, \tag{4.13}$$

kde pre $\forall\, t \in [0,T]$

$$\mathsf{E}[\sigma_t] = \theta := \exp\left\{\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 \delta^{2H}\right\} > 0.$$

V gaussovskom prípade ďalej možno pomocou Fubiniho vety a momentovej vytvárajúcej funkcie gaussovskej náhodnej veličiny $(B_s^H - B_{s-\delta}^H)$ ľahko ukázať, že proces $\{\sigma_\bullet^2\}$ je kvadraticky integrovateľný na priestore $[0,T] \times \Omega$:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_\mathsf{P}\left[\int_0^T \sigma_s^2 \,\mathrm{d}s\right] &= \int_0^T \left(\theta^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 \delta^{2H}} \underbrace{\mathsf{E}_\mathsf{P}\left[\exp\left\{\frac{2k}{\delta}(B_s^H - B_{s-\delta}^H)\right\}\right]}_{\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2k}{\delta}\right)^2 \delta^{2H}\right\}}\right) \mathrm{d}s \\ &= T\,\theta^2 \exp\left\{\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 \delta^{2H}\right\} < \infty.\end{aligned}$$

Itoov integrál $\int_0^t \sigma_s \,\mathrm{d}W_s$ je potom pre $\forall\, t \in [0,T]$ dobre definovaný a braný ako proces na intervale $[0,T]$ je martingal.

V nasledujúcich oddieloch detailne uvedieme dôkazy tvrdení z článku Vilela Mendes a kol. (2015) o neprípustnosti arbitráže a neúplnosti, resp. úplnosti VM modelu pri dvoch rôznych vzájomných závislostných štruktúrach procesov W a Z^H. Našim cieľom je zdôrazniť, že tieto dôkazy nevyžadujú gaussovskosť procesu Z^H vo vzorci volatility (4.10), a že sú platné pre ľubovoľný hermitovský proces Z^H. V tomto spočíva hlavný prínos našej práce.

4.5 Neprípustnosť arbitráže pri dvoch nezávislých zdrojoch náhodnosti

V tejto časti ukážeme, že VM model nepripúšťa arbitráž v špeciálnom prípade, keď zdroje šumu, procesy W a Z^H, sú nezávislé. Dôkaz tohto tvrdenia vyložíme podrobnejšie ako Vilela Mendes a kol. (2015, časť 3.1).

Veta 4.1. *Majme vo VM modeli procesy W a Z^H nezávislé, reprezentované spôsobom uvedeným v príklade 4.1, to jest $W_\bullet = W_\bullet(\omega_1)$ a $Z_\bullet^H = Z_\bullet^H(\omega_2)$. Nech platí*

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}\left[\exp\left\{\frac{1}{2} A_2(\omega_2)\, \|\mu_\bullet(\omega_2)\|^2_{L^2([0,T])}\right\}\right] < \infty \quad \mathsf{P}_2\text{-}s.i., \tag{4.14}$$

kde

$$A_2(\omega_2) = \frac{2}{\min\limits_{t\in[0,T]} \sigma_t^2(\omega_2)}. \tag{4.15}$$

Potom VM model nepripúšťa arbitráž.

Poznámka 4.5. Podmienka (4.14) je splnená napríklad ak proces μ nezávisí na ω_1, alebo je úplne deterministický. Predpoklad $\mu_\bullet \in L^\infty([0,T] \times \Omega)$, ktorý kladú Vilela Mendes a kol., je tiež jej špeciálnym prípadom. Naopak, podmienka vo všeobecnosti nemusí byť splnená ani pre gaussovský proces μ.

Dôkaz vety 4.1. Najskôr ukážeme použitím Girsanovovej vety, že pri reštrikcií na fixné $\omega_2 \in \Omega_2$ na jednorozmernom pravdepodobnostnom priestore $(\Omega_1, \mathcal{F}^1, \mathsf{P}_1)$ existuje EMM. V druhom kroku využitím myšlienky dôkazu prvej fundamentálnej vety oceňovania (Shreve, 2004, Theorem 5.4.7, s. 231) ukážeme, že z existencie EMM plynie nemožnosť arbitráže.

1. krok: Uvažujme proces

$$S^* = \{S_t^*,\ t \geq 0\}, \quad S_t^* = D_t S_t,$$

diskontovaných cien aktíva. Diskontný proces (4.8) má diferenciál

$$\mathrm{d}D_t = -rD_t\,\mathrm{d}t,$$

takže aplikáciou Itoovho vzorca pre súčin dostávame

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t^* &= \sigma_t S_t^*\,\mathrm{d}W_t - (r - \mu_t)S_t^*\,\mathrm{d}t \\ &= \sigma_t S_t^*\Big(\mathrm{d}W_t - \underbrace{\frac{r-\mu_t}{\sigma_t}}_{\gamma_t}\,\mathrm{d}t\Big), \end{aligned} \tag{4.16}$$

kde γ je proces takzvanej *trhovej ceny rizika*[3]

$$\gamma_t(\omega_1, \omega_2) = \frac{r - \mu_t(\omega_1,\omega_2)}{\sigma_t(\omega_2)}. \tag{4.17}$$

Zvoľme teraz pevné $\omega_2 \in \Omega_2' := \Omega_2 \backslash N$, kde N je P_2-nulová množina, na ktorej nie sú splnené predpoklady vety. Chceme použiť Girsanovovu vetu na proces $S^*(\omega_2)$ diskontovanej ceny aktíva zúžený na priestor Ω_1. Definujme girsanovovskú hustotu

$$\eta_T(\omega_2) := \mathscr{E}\left\{\int_0^T \gamma_s(\omega_2)\,\mathrm{d}W_s\right\} = \exp\left\{\int_0^T \gamma_s(\omega_2)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_s^2(\omega_2)\,\mathrm{d}s\right\}. \tag{4.18}$$

Proces volatility σ nezávisí na $\omega_1 \in \Omega_1$, inak by proces Z^H musel tiež závisieť na ω_1. Fixovaním ω_2 teda dostávame jeho kladnú spojitú deterministickú trajektóriu $\sigma_\bullet(\omega_2)$. Na kompaktnom intervale $[0,T]$ potom existuje jej kladné minimum, takže

$$\begin{aligned} \int_0^T \gamma_t^2(\omega_2)\,\mathrm{d}t &= \int_0^T \left(\frac{r - \mu_t(\omega_2)}{\sigma_t(\omega_2)}\right)^2 \mathrm{d}t \leq \int_0^T \left(\frac{r + |\mu_t(\omega_2)|}{\min\limits_t \sigma_t(\omega_2)}\right)^2 \mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^T \frac{2r^2 + 2|\mu_t(\omega_2)|^2}{\min\limits_t \sigma_t^2(\omega_2)}\,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\frac{2Tr^2}{\min\limits_t \sigma_t^2(\omega_2)}}_{A_1(\omega_2)} + \underbrace{\frac{2}{\min\limits_t \sigma_t^2(\omega_2)}}_{A_2(\omega_2)} \left\|\mu_\bullet(\omega_2)\right\|^2_{L^2([0,T])}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

[3] Anglicky „Market Price of Risk Process“.

Predpoklad (4.14) potom zabezpečí splnenie Novikovovej podmienky (1.9):

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2(\omega_2)\,\mathrm{d}t\right\}\right] &\le \mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\Big(A_1(\omega_2) + A_2(\omega_2)\,\|\mu_\bullet(\omega_2)\|^2_{L^2([0,T])}\Big)\right\}\right] \\ &\le \mathrm{e}^{\frac{1}{2}A_1(\omega_2)}\,\mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}A_2(\omega_2)\,\|\mu_\bullet(\omega_2)\|^2_{L^2([0,T])}\right\}\right] < \infty.\end{aligned}$$

Preto platí

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}[\eta_T(\omega_2)] = 1$$

a podľa Girsanovovej vety môžeme na $(\Omega_1, \mathcal{F}^1)$ definovať vzťahom

$$\mathrm{d}\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2) = \eta_T(\omega_2)\,\mathrm{d}\mathsf{P}_1$$

novú mieru $\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)$ takú, že proces

$$\widetilde{W}_t := W_t - \int_0^t \gamma_s(\omega_2)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,T]$$

je Wienerov na priestore $\Big(\Omega_1, \mathcal{F}^1, \widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)\Big)$.

Ostáva nám ukázať, že proces diskontovanej ceny aktíva S^* je $\{\mathcal{F}_t^1\}$-martingal vzhľadom k novej miere $\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)$. Zo vzťahu (4.16) plynie, že S^* je na priestore $\Big(\Omega_1, \mathcal{F}^1, \widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)\Big)$ daný rovnicou

$$\mathrm{d}S_t^*(\omega_2) = \sigma_t S_t^*(\omega_2)\Big(\mathrm{d}\widetilde{W}_t\Big). \tag{4.20}$$

Analogicky vzťahu (4.9) možno aj tu použitím Itoovho vzorca ukázať, že riešením rovnice je stochastická exponenciála

$$\begin{aligned}S_t^*(\omega_2) &= S_0^*\,\mathscr{E}\left\{\int_0^t \sigma_s(\omega_2)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_s\right\} \\ &= S_0^*(\omega_2)\exp\left\{\int_0^t \sigma_s(\omega_2)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2(\omega_2)\,\mathrm{d}s\right\}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Keďže $\sigma_\bullet^2(\omega_2)$ je pre každé pevné $\omega_2 \in \Omega_2'$ deterministická funkcia, Itoov integrál vo vzťahu (4.21) je dobre definovaný, a dokonca je martingal. Vieme, že stochastická exponenciála (lokálneho) martingalu M je vždy lokálny martingal a je martingal práve vtedy, keď jej stredná hodnota je v čase konštantná, respektíve v prípade $M_0 = 0$ je rovná 1. Na to opäť stačí overiť Novikovovu podmienku. Ale tá je splnená, pretože proces σ je ohraničený a nezávisí na ω_1:

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_t^2(\omega_2)\,\mathrm{d}t\right\}\right] = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_t^2(\omega_2)\,\mathrm{d}t\right\} < \infty. \tag{4.22}$$

Teda S^* je pre $\forall\,\omega_2 \in \Omega_2'$ martingal voči $\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)$, čo znamená, že $\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)$ je EMM na merateľnom priestore $(\Omega_1, \mathcal{F}^1)$. Tým je prvý krok dôkazu hotový.

2. krok: Uvažujme $\{X_t(\omega_1,\omega_2),\ t\in[0,T]\}$ na $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$, proces hodnoty ľubovoľného arbitrážneho portfólia, $T\geq 0$ je investičný horizont. Z definície 1.6 X spĺňa

(i) $X_0\equiv 0$,
(ii) $\mathsf{P}[X_T<0]=0$,
(iii) $\mathsf{P}[X_T>0]>0$,

takže pomocou Fubiniho vety dostávame

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{\text{(ii)}}{=} \mathsf{P}[X_T(\omega_1,\omega_2)<0]=\mathsf{P}_1\otimes\mathsf{P}_2[X_T(\omega_1,\omega_2)<0]\\
&= \iint\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} \mathbb{I}[X_T(\omega_1,\omega_2)<0]\,\mathrm{d}(\mathsf{P}_1\otimes\mathsf{P}_2)(\omega_1,\omega_2)\\
&= \int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1}\mathbb{I}[X_T(\omega_1,\omega_2)<0]\,\mathrm{d}\mathsf{P}_1(\omega_1)\right]\mathrm{d}\mathsf{P}_2(\omega_2)\\
&= \mathsf{E}_{\mathsf{P}_2}\Big[\mathsf{P}_1[X_T(\omega_1;\omega_2)<0]\Big] \qquad (4.23)\\
&\Rightarrow \mathsf{P}_1[X_T(\omega_1;\omega_2)<0]=0 \quad \mathsf{P}_2\text{-s.i.}, \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

lebo inak by stredná hodnota bola ostro kladná.

Na X sa môžeme dívať ako na systém procesov na Ω_1 parametrizovaný množinou Ω_2:

$$
\begin{aligned}
X &= \{X_t(\omega_1,\omega_2),\ t\geq 0,\ (\omega_1,\omega_2)\in\Omega\}\\
&= \{X^{\omega_2}: X^{\omega_2}=\{X_t(\omega_1;\omega_2),\ t\geq 0,\ \omega_1\in\Omega_1\},\ \omega_2\in\Omega_2\}.
\end{aligned}
$$

Pre P_2-s.v. procesy X^{ω_2} vieme podľa 1. kroku zostrojiť EMM $\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)$, voči ktorej je diskontovaná hodnota arbitrážneho protfólia D_tX_t martingal. Platí teda

$$
\begin{aligned}
& 0 \overset{(4.24)}{=} \mathsf{P}_1[X_T<0](\omega_2)=\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)[X_T<0]\\
\Leftrightarrow\quad & 0=\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)[D_TX_T<0] \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

a

$$
\mathsf{E}_{\left(\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)\right)}[D_TX_T]=\mathsf{E}_{\left(\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)\right)}[D_0X_0]\overset{\text{(i)}}{=}0. \qquad (4.26)
$$

Z rovností (4.25) a (4.26) vyplýva, že

$$
\begin{aligned}
& \widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)[D_TX_T>0]=0\\
\Leftrightarrow\quad & \widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)[X_T>0]=0\\
\Leftrightarrow\quad & \mathsf{P}_1[X_T>0]=0 \qquad \mathsf{P}_2\text{-s.i.} \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

Keď teraz analogicky odvodeniu vzťahu (4.23) spočítame pravdepodobnosť $\mathsf{P}[X_T>0]$, zistíme, že

$$
\mathsf{P}[X_T>0]=\mathsf{E}_{\mathsf{P}_2}\Big[\mathsf{P}_1[X_T>0]\Big]\overset{(4.27)}{=}0,
$$

čo je v spore s bodom (iii) z definície arbitrážneho portfólia. □

Poznámka 4.6.

(i) Všimnime si, že dôkaz nevyžadoval gaussovskosť procesu Z^H. V prvom kroku sme sa opreli o nezávislosť procesov W a Z^H reprezentovanú pomocou súčinového pravdepodobnostného priestoru. Po zafixovaní $\omega_2 \in \Omega_2'$ sme na proces diskontovanej ceny akcie S^* mohli uplatniť klasickú Girsanovovu vetu pre Wienerov proces. Z vlastností procesu Z^H sme využili iba spojitosť, ktorá zabezpečila ohraničenosť $\sigma_\bullet(\omega_2)$ na kompakte $[0, T]$. V druhom kroku nám postačila súčinová štruktúra priestoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ umožňujúca použitie Fubiniho vety a integráciu po zložkách.

(ii) Zdôraznime ďalej, že v dôkaze sme vo všeobecnosti neskonštruovali EMM k miere P na $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, ale len k jej jednej zložke P_1 na $(\Omega_1, \mathcal{F}_T^1)$. Preto sme ani nemohli priamo aplikovať prvú fundamentálnu vetu oceňovania.

4.6 Neúplnosť modelu pri pri dvoch nezávislých zdrojoch náhodnosti

Vilela Mendes a kol. (2015, časť 3.2) ukazujú, že VM model v kontexte príkladu 4.1 je neúplný, pretože obsahuje dva zdroje šumu, ale len jedno základné rizikové aktívum, takže riziko plynúce z volatility nemožno hedžovať. Formálne to znamená, že EMM $\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)$ z vety 4.1 nie je jednoznačná. Vilela Mendes a kol. pomocou procesu B^H zostrojujú inú ekvivalentnú mieru, voči ktorej má byť proces S^* martingal. Ich dôkaz sa však v niekoľkých bodoch javí neucelený.

V tejto práci podrobne preskúmame otázku úplnosti VM modelu v prípade, že zdroje šumu W a Z^H sú nezávislé. Najskôr uplatnením myšlienky z dôkazu druhej fundamentálnej vety oceňovania (Shreve, 2004, Theorem 5.4.9, s. 232) ukážeme pomerne reštriktívnu nutnú podmienku úplnosti (veta 4.2). Ak tá nie je splnená, model je neúplný.

V špeciálnom prípade, keď nutná podmienka je splnená, odvodíme z nej tvar procesu μ (dôsledok 4.3), a potom upresnením dôkazu Vilela Mendesa a kol. ukážeme, že ELMM na súčinovom priestore Ω nie je jednoznačná (veta 4.4). Nevieme však potvrdiť, že je skutočne martingalová.

Neúplnosť modelu teda dokážeme až špeciálny prípad, v ktorom bez dodatočných predpokladov nevieme na základe druhej fundamentálnej vety oceňovania potvrdiť ani úplnosť, ani neúplnosť. Začnime odvodením nutnej podmienky.

Veta 4.2. *Nech sú splnené predpoklady vety 4.1. Potom ak VM model je úplný, tak existuje množina $\Omega_2^\circ \subset \Omega_2$ taká, že $\mathsf{P}_2(\Omega_2^\circ) = 1$ a pre $\forall\, \omega_2, \omega_2' \in \Omega_2^\circ$ platí*

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}\left[\int_0^T \Big(\gamma_s(\bullet, \omega_2) - \gamma_s(\bullet, \omega_2')\Big)^2 \,\mathrm{d}s\right] = 0. \tag{4.28}$$

Dôkaz. Nech model je úplný. Potom každú výplatu derivátu V_T na konci investičného horizontu, to jest v čase T, možno hedžovať. To znamená, že pre každú náhodnú veličinu V_T na Ω existuje replikačné portfólio, ktorého hodnotu reprezentuje $\mathbb{F}$-progresívny proces $X = \{X_t\}$ spĺňajúci

(i) $X_0 \equiv x_0 \in \mathbb{R}$, deterministická hodnota,

(ii) $X_T = V_T$ P-s.i.

Ak vlastnosť (ii) je splnená P-, čiže $(\mathsf{P}_1 \otimes \mathsf{P}_2)$-skoro iste na $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, tak musí byť splnená aj P_1-skoro iste na Ω_1 pre skoro všetky pevne zvolené $\omega_2 \in \Omega_2$, to jest pre všetky $\omega_2 \in \Omega_2''$ z nejakej $\Omega_2'' \subset \Omega_2$, $\mathsf{P}_2(\Omega_2'') = 1$ (viď napr. Rudin, 1960, kap. 8). Pripomeňme, že Ω_2', $\mathsf{P}_2(\Omega_2') = 1$, je množina, na ktorej sú splnené predpoklady vety 4.1. Označme $\Omega_2^\circ := \Omega_2' \cap \Omega_2''$. Potom $\mathsf{P}_2(\Omega_2^\circ) = 1$ a pre všetky $\omega_2 \in \Omega_2^\circ$ pevné sú splnené predpoklady vety 4.1 a vlastnosť (ii) platí P_1-skoro iste.

V prvom kroku dôkazu vety 4.1 sme videli, že každá zo systému mier $\{\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)\}$, $\omega_2 \in \Omega_2^\circ$, je EMM k miere P_1 na priestore Ω_1, takže pre každé pevné $\omega_2 \in \Omega_2^\circ$ je diskontovaná hodnota replikačného portfólia $\{D_t X_t\}$ $\big(\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)\big)$-martingal. Pripomeňme, že D je deterministický diskontný proces, $D_0 = 1$, viď (4.8). Voľme teraz derivát, ktorý pre nejakú množinu $A_1 \in \mathcal{F}_T^1$ v čase T vypláca pre $\forall\, \omega_2 \in \Omega_2^\circ$ P_1-s.i. čiastku

$$V_T(\omega_1, \omega_2) = \frac{\mathbb{I}_{A_1 \times \Omega_2}(\omega_1, \omega_2)}{D_T} = \frac{\mathbb{I}_{A_1}(\omega_1)}{D_T}.$$

Pretože martingal má konštantnú strednú hodnotu, pre $\forall\, \omega_2 \in \Omega_2^\circ$ platí

$$\begin{aligned} x_0 &\overset{\text{(i)}}{=} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)}[D_0 X_0] = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)}[D_T X_T] \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)}[D_T V_T] = \mathsf{E}_{\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)}[\mathbb{I}_{A_1}] = \widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)[A_1]. \end{aligned}$$

Proces X vrátane počiatočnej podmienky x_0 závisí na hedžovanej výplate, čiže na A_1, nie však na $\omega_2 \in \Omega_2^\circ$. Ukázali sme teda, že ak je model úplný, tak sú všetky miery $\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)$, $\omega_2 \in \Omega_2^\circ$, totožné v nasledovnom zmysle:

$$\forall\, \omega_2, \omega_2' \in \Omega_2^\circ, \quad \forall\, A_1 \in \mathcal{F}_T^1 \quad \widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)[A_1] = \widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2')[A_1].$$

Miery $\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)$ sú voči miere P_1 dané P_1-s.i. jednoznačne hustotami

$$\eta_T(\bullet; \omega_2) = \exp\left\{ \int_0^T \gamma_s(\bullet; \omega_2)\, \mathrm{d}W_s(\bullet) - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_s^2(\bullet; \omega_2)\, \mathrm{d}s \right\},$$

takže tieto hustoty musia byť totožné funkcie v $L^1(\Omega_1)$. Exponenciála je prostá transformácia, preto je ekvivalentné tvrdenie, že sa v tomto priestore zhodujú ich exponenty, to jest že pre $\forall\, \omega_2, \omega_2' \in \Omega_2^\circ$ platí

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^T \gamma_s(\bullet; \omega_2)\, \mathrm{d}W_s(\bullet) - \int_0^T \gamma_s(\bullet; \omega_2')\, \mathrm{d}W_s(\bullet) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\int_0^T \gamma_s^2(\bullet; \omega_2)\, \mathrm{d}s - \int_0^T \gamma_s^2(\bullet; \omega_2')\, \mathrm{d}s \right) = 0 \qquad \mathsf{P}_1\text{-s.i.} \end{aligned} \tag{4.29}$$

V prvej zátvorke vo vzťahu (4.29) vidíme rozdiel dvoch $L^2(\Omega_1)$-martingalov, viď (4.19), čo je opäť $L^2(\Omega_1)$-martingal. V druhej zátvorke máme rozdiel ich kvadratických variácií, čo je proces s konečnou variáciou. Vyšetrujme teda, kedy sa tento semimartingal rovná nule. Vieme, že ak martingal nie je nulový proces, nie je možné ho kompenzovať na nulový odčítaním procesu s konečnou variáciou. Preto musia byť P_1-s.i. nulové obe zložky semimartingalu. Špeciálne musí byť P_1-s.i. nulová martingalová zložka v čase T, čo možno ekvivalentne zapísať pomocou normy v $L^2(\Omega_1)$ a Itoovej izometrie takto:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}\left[\left(\int_0^T \gamma_s(\bullet,\omega_2)\,\mathrm{d}W_s(\bullet) - \int_0^T \gamma_s(\bullet,\omega_2')\,\mathrm{d}W_s(\bullet)\right)^2\right] \\ &= \mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}\left[\left(\int_0^T \Big(\gamma_s(\bullet,\omega_2) - \gamma_s(\bullet,\omega_2')\Big)\,\mathrm{d}W_s(\bullet)\right)^2\right] \\ &= \mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}\left[\int_0^T \Big(\gamma_s(\bullet,\omega_2) - \gamma_s(\bullet,\omega_2')\Big)^2\,\mathrm{d}s\right], \end{aligned}$$

čo je práve tvrdenie vety. $\square$

Dôsledok 4.3. *Pre nutnú podmienku úplnosti VM modelu* (4.28) *platia nasledujúce ekvivalentné vyjadrenia: existuje taký* $\psi \in L^2([0,T]\times\Omega_1)$ $\mathbb{F}^1$*-progresívne merateľný proces, že pre* $\forall\,\omega_2 \in \Omega_2^\circ$

$$\gamma_s(\omega_1,\omega_2) = \psi_s(\omega_1) \qquad (s,\omega_1)\text{-}s.v., \quad resp. \tag{4.30}$$

$$\mu_s(\omega_1,\omega_2) = r - \psi_s(\omega_1)\sigma_s(\omega_2) \qquad (s,\omega_1)\text{-}s.v. \tag{4.31}$$

Dôkaz. Rozpíšuc proces trhovej ceny rizika γ v tvare (4.17) platí

$$\begin{aligned} & \forall\,\omega_2,\omega_2' \in \Omega_2^\circ \quad \mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}\left[\int_0^T \Big(\gamma_s(\omega_1,\omega_2) - \gamma_s(\omega_1,\omega_2')\Big)^2\,\mathrm{d}s\right] = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall\,\omega_2,\omega_2' \in \Omega_2^\circ \quad \gamma_s(\omega_1,\omega_2) = \gamma_s(\omega_1,\omega_2') \qquad (s,\omega_1)\text{-s.v.} \\ \Leftrightarrow\quad & \forall\,\omega_2 \in \Omega_2^\circ \quad \gamma_s(\omega_1,\omega_2) = \psi_s(\omega_1) \qquad (s,\omega_1)\text{-s.v.} \\ \Leftrightarrow\quad & \forall\,\omega_2 \in \Omega_2^\circ \quad \mu_s(\omega_1,\omega_2) = r - \psi_s(\omega_1)\sigma_s(\omega_2) \quad (s,\omega_1)\text{-s.v.} \end{aligned}$$

pre nejaký $\mathbb{F}^1$-progresívne merateľný proces $\psi \in L^2([0,T]\times\Omega_1)$. $\square$

Ide teda o pomerne reštriktívnu nutnú podmienku. Vylučuje napríklad prípad, že by proces μ nezávisel na ω_2. Pritom taký prípad je intuitívny, ak na priestore $(\Omega_2,\mathcal{F}^2,\mathsf{P}_2)$ chceme modelovať náhodnosť súvisiacu s volatilitou nezávisle od ceny aktíva. Okrem toho tvar (4.31) nutnej podmienky znamená úzke previazanie driftu a difúzie ceny aktíva, takže vyvstáva otázka, či v praxi možno nájsť taký proces ψ, ktorý by mal zmysluplnú ekonomickú interpretáciu.

Hoci je nutná podmienka (4.28) tak prísna, nie je pre úplnosť VM modelu postačujúca, ako ukazuje nasledujúca veta.

Veta 4.4. *Nech sú splnené predpoklady vety 4.1 a nutná podmienka úplnosti* (4.28)*. Potom vo VM modeli existujú aspoň dve rôzne ELMM.*

Dôkaz. Skonštruujeme tieto dve ELMM.

1. ELMM: Podľa dôsledku 4.3 je nutná podmienka (4.28) ekvivalentná s vyjadrením (4.30), že existuje $\mathbb{F}^1$-progresívne merateľný proces $\psi \in L^2([0,T]\times\Omega_1)$ taký, že

$$\forall\,\omega_2 \in \Omega_2^\circ \qquad \gamma_s(\omega_1,\omega_2) = \psi_s(\omega_1) \qquad (s,\omega_1)\text{-s.v.}$$

Girsanovovská hustota (4.18) z dôkazu vety 4.1 v tom prípade nezávisí na $\omega_2 \in \Omega_2^\circ$:

$$\text{(4.32)} \quad \forall\, \omega_2 \in \Omega_2^\circ \qquad \eta_T(\omega_1;\omega_2) = \eta_T(\omega_1) := \mathscr{E}\left\{\int_0^T \psi_s(\omega_1)\,\mathrm{d}W_s(\omega_1)\right\} = \\ = \exp\left\{\int_0^T \psi_s(\omega_1)\,\mathrm{d}W_s(\omega_1) - \frac{1}{2}\int_0^T \psi_s^2(\omega_1)\,\mathrm{d}s\right\}.$$

Z ohraničenia (4.19) a podmienky (4.14) potom vyplýva, že

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \psi_t^2\,\mathrm{d}t\right\}\right] \le K < \infty$$

pre nejaké $K > 0$, ktoré nezávisí na ω_2, a integrovaním cez Ω_2 dostaneme, že Novikovova podmienka

$$\text{(4.33)} \qquad \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \psi_t^2\,\mathrm{d}t\right\}\right] = \mathsf{E}_{\mathsf{P}_2}\left(\mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \psi_t^2\,\mathrm{d}t\right\}\right]\right) \le K < \infty$$

je splnená na celom súčinovom priestore $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. V tomto špeciálnom prípade použitím Girsanovovej vety ako v dôkaze vety 4.1 dostaneme mieru $\widetilde{\mathsf{P}}$ ekvivalentnú miere $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 \otimes \mathsf{P}_2$ na Ω a $\widetilde{\mathsf{P}}$-Wienerov proces $\widetilde{W} = \{\widetilde{W}_t,\ t \in [0,T]\}$ taký, že

$$\widetilde{W}_t(\omega_1) = W_t(\omega_1) - \int_0^t \psi_s(\omega_1)\,\mathrm{d}s,$$

a podľa vzťahov (4.20) a (4.21) je diskontovaná cena aktíva

$$\text{(4.34)} \qquad S_t^*(\omega_1,\omega_2) = S_0^*\,\mathscr{E}\left\{\int_0^t \sigma_s(\omega_2)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_s(\omega_1,\omega_2)\right\}.$$

stochastická exponenciála Itoovho integrálu, čo je lokálny martingal.

2. ELMM: Skonštruujeme ju postupom, ktorý využívajú Vilela Mendes a kol. (2015, Proposition 3.3). Zaveďme pre zvyšok tohto dôkazu značenie $W^1 = W^1(\omega_1)$ pre proces riadiaci cenu aktíva v rovnici (4.6). Zapíšme proces $Z^H = Z^{H,k}$ riadiaci volatilitu vo vzťahu (4.10) v tvare (3.13):

$$Z_t^{H,k}(\omega_2) = \\ = c(H,k)\int \cdots \int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_0^t \left(\prod_{j=1}^k (s-y_j)_+^{-(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{k})}\right)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}W_{y_1}^2(\omega_2)\cdots\mathrm{d}W_{y_k}^2(\omega_2).$$

Je zrejmé, že Wienerov proces W^2 nemôže závisieť na ω_1, lebo inak by aj proces Z^H závisel na ω_1, my však predpokladáme nezávislé procesy $W^1(\omega_1)$ a $Z^H(\omega_2)$ ako v príklade 4.1. Následne aj procesy W^1 a W^2 musia byť nezávislé a $\mathbb{R}^2$-hodnotový proces $W = \left(W^1(\omega_1), W^2(\omega_2)\right)^\top$ je dvojrozmerný Wienerov proces na karteziánskom súčine $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Chceme teraz použiť Girsanovovu vetu na dvojrozmerné procesy W a Γ na Ω, kde pre $\forall\, t \in [0,T]$

$$\Gamma_t := \begin{pmatrix} \gamma_t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_t(\omega_1) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Je zrejmé, že $\Gamma \in L^2([0,T] \times \Omega; \mathbb{R}^2)$ je $\mathbb{F}$-progresívne merateľný, lebo ψ aj konštantná jednotka sú progresívne merateľné procesy z $L^2([0,T]\times\Omega)$. Girsanovovská hustota bude

$$\begin{aligned} \zeta_T :&= \mathscr{E}\left\{\int_0^T \Gamma_s^\top \,\mathrm{d}W_s\right\} = \exp\left\{\int_0^T \Gamma_s^\top \,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^T \|\Gamma_s\|^2 \,\mathrm{d}s \right\} \\ &= \underbrace{\exp\left\{\int_0^T \psi_s \,\mathrm{d}W_s^1 - \frac{1}{2}\int_0^T \psi_s^2 \,\mathrm{d}s \right\}}_{=\eta_T,\ \text{viď (4.32)}} \underbrace{\exp\left\{\int_0^T 1 \,\mathrm{d}W_s^2 - \frac{1}{2}\int_0^T 1 \,\mathrm{d}s \right\}}_{=\exp\left\{W_T^2 - \frac{1}{2}T\right\} = \mathscr{E}\{W^2\}}. \end{aligned}$$

Stredná hodnota $\mathsf{E}_\mathsf{P}[\eta_T] = 1$ z Novikovovej podmienky (4.33), $\mathsf{E}_\mathsf{P}[\mathscr{E}\{W^2\}] = 1$, lebo W^2 je Wienerov proces, a tieto dve stochastické exponenciály sú nezávislé, takže $\mathsf{E}_\mathsf{P}\,\zeta_T = 1$. Podľa Girsanovovej vety teda existuje miera $\widehat{\mathsf{P}}$ na $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ ekvivalentná miere P a dvojrozmerný $\widehat{\mathsf{P}}$-Wienerov proces $\widehat{W} = \{\widehat{W}_t, t \in [0,T]\}$,

$$\widehat{W}_t = \begin{pmatrix} \widehat{W}_t^1(\omega_1) \\ \widehat{W}_t^2(\omega_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_t^1(\omega_1) - \int_0^t \psi_s(\omega_1)\,\mathrm{d}s \\ W_t^2(\omega_2) - t \end{pmatrix}.$$

Diskontovaná cena aktíva je analogicky vzťahu (4.34) opäť lokálny martingal:

$$S_t^*(\omega_1,\omega_2) = S_0^*\,\mathscr{E}\left\{\int_0^t \sigma_s(\omega_2)\,\mathrm{d}\widehat{W}_s^1(\omega_1,\omega_2)\right\}. \qquad \square$$

Poznámka 4.7.

(i) Proces S^* daný voči mieram $\widetilde{\mathsf{P}}$ a $\widehat{\mathsf{P}}$ stochastickou exponenciálou tvaru (4.34) je martingal práve vtedy, keď $\mathsf{E}\,S_T^* = \mathsf{E}\,S_0^*$, kde strednú hodnotu berieme voči príslušnej miere $\widetilde{\mathsf{P}}$ alebo $\widehat{\mathsf{P}}$. Podobne ako pri girsanovovských hustotách stačí, aby bola splnená Novikovova podmienka, ktorá je v tomto prípade

$$\mathsf{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_t^2(\omega_2)\,\mathrm{d}t\right\}\right] < \infty, \tag{4.35}$$

strednú hodnotu berieme opäť voči príslušnej miere. Z vyjadrenia (4.13) pre σ vidno, že pri overovaní tejto podmienky sa nevieme vyhnúť vyšetrovaniu konvergencie integrálu typu

$$\int_{\Omega_2} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{X(\omega_2)}}\,\mathrm{d}\,\mathsf{P}_2(\omega_2),$$

kde $X(\omega_2) = Z_t^H(\omega_2) - Z_{t-\delta}^H(\omega_2)$. Lenže taký integrál iterovanej exponenciály diverguje už aj v prípade, keď proces Z^H je gaussovský. Preto sa týmto spôsobom nevieme presvedčiť, že nájdené miery $\widetilde{\mathsf{P}}$ a $\widehat{\mathsf{P}}$ sú martingalové.

(ii) Pre porovnanie, vo vete 4.1, kde sme fixovali ω_2, sme potrebovali, aby v podmienke (4.35) konvergovala iba stredná hodnota voči miere $\widetilde{\mathsf{P}}_1^T(\omega_2)$, čo bolo triviálne splnené, lebo σ nezávisí na ω_1, viď (4.22).

(iii) Keby sme proces $Z^H(\omega_2)$ nahradili nejakým procesom Y takým, aby bola splnená Novikovova podmienka (4.35) (napr. ak $Y \in L^\infty([0,T]\times\Omega_2)$), boli by obe miery $\widetilde{\mathsf{P}}$ a $\widehat{\mathsf{P}}$ martingalové, čím by podľa druhej fundamentálnej vety oceňovania bola dokázaná neúplnosť modelu.

(iv) Postup Vilela Mendesa a kol., ktorý sme použili na konštrukciu druhej ELMM v dôkaze vety 4.4, sa zakladá na známom fakte (viď napr. Shreve, 2004, kap. 5), že ak má byť trhový model úplný, filtrácia pravdepodobnostného priestoru, na ktorom je model definovaný, musí byť generovaná len jedným procesom. Hovoríme, že v modeli musí byť len *jeden zdroj šumu*, respektíve *zdroj náhodnosti*. Na tento problém narazíme vždy, keď budeme uvažovať, že procesy riadiace cenu akcie a volatilitu sú nezávislé. Vilela Mendes a kol. to navrhujú riešiť zavedením vhodnej závislostnej štruktúry, ako uvidíme v nasledujúcom oddiele.

4.7 Úplnosť modelu pri jednom zdroji šumu

Vilela Mendes a kol. (2015, oddiel 3.3) problém neúplnosti riešia zavedením nasledujúcej závislosti: reprezentujú fBp B^H ako Itoov integrál, viď (3.15), a stotožnia jeho integrátor s Wienerovym procesom W, riadiacim rovnicu ceny aktíva. V takomto modeli možné ukázať jednoznačnosť EMM, pretože je v ňom len jeden zdroj náhodnosti – to jest filtrácia pravdepodobnostného priestoru je generovaná len jedným procesom. (Vilela Mendes, 2008) navyše tvrdí, že takýto model dobre korešponduje s reálnymi dátami.

Keďže však proces σ už nebudeme môcť urobiť deterministickým, vznikne problém so splnením Novikovovej podmienky (porov. dôkaz vety 4.1, najmä vzťah (4.18) a nasl.). Vilela Mendes a kol. ho riešia tvrdým ohraničením procesu B^H, ako vidno v nasledujúcej vete.

Veta 4.5. *Majme VM model na stochastickej báze* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$*, kde* $\mathbb{F}$ *je obohatená filtrácia generovaná Wienerovym procesom* W *riadiacim cenu akcie v rovnici* (4.9)*. Modifikujme model tak, že vo vzorci pre volatilitu* (4.7) *nahradíme hermitovský proces* Z^H *procesom* $\bar{Y} = \{\bar{Y}_t\}$*,*

$$\bar{Y}_t = \Pi^{(M)}(Y_t),$$

kde $0 < M < \infty$ *ľubovoľne veľké,* $\{Y_t\}$ *je ľubovoľný* $\mathbb{F}$*-progresívne merateľný proces a* $\Pi^{(M)}$ *je projekcia reálnych čísel na ohraničený interval* $[-M, M]$*,*

$$\Pi^{(M)}(x) = \begin{cases} M, & x \geq M, \\ x, & x \in (-M, M), \\ -M, & x \leq -M, \end{cases}$$

to jest namiesto vzorca (4.7) *máme*

$$\log \sigma_t = \beta + \frac{k}{\delta}\left[\bar{Y}_t - \bar{Y}_{t-\delta}\right]. \tag{4.36}$$

Nech ďalej platí, že

$$\mathsf{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}A_2 \left\|\mu_\bullet\right\|^2_{L^2([0,T])}\right\}\right] < \infty, \tag{4.37}$$

kde

$$A_2 = \frac{2}{\exp\left\{\beta - 2M\frac{k}{\delta}\right\}}$$

a $\mathsf{E} = \mathsf{E}_\mathsf{P}$ *značí strednú hodnotu voči miere* P*.*
Potom tento modifikovaný model nepripúšťa arbitráž a je úplný.

Poznámka 4.8.

(i) Predpoklad, že filtrácia $\mathbb{F}$ je generovaná Wienerovym procesom W, vylučuje nezávislosť riadiacich procesov $\bar{Y}$ a W. Model teda nemožno reprezentovať spôsobom uvedeným v príklade 4.1, a tak nie je potrebné uvažovať o priestore Ω ako o súčinovom. Preto v tomto oddiele zanedbáme predpoklad (SP) a budeme jednoducho písať $\omega \in \Omega$. Predpoklad (SD) potom nemá zmysel uvažovať pre každé pevné $\omega_2 \in \Omega_2$, ale jednoducho pre proces ceny aktíva S na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

(ii) V takto modifikovanom kontexte je zrejmé, že dôkaz existencie EMM z vety 4.1 nie je platný, nakoľko nemožno využiť úvahu o fixovaní ω_2 a dezintegráciu pravdepodobnostného priestoru. Nestačí preto dokazovať len jednoznačnosť, ale musíme opätovne ukázať aj existenciu EMM. To sa však urobí ľahko, analogicky prvému kroku zmieneného dôkazu s využitím ohraničenosti procesu $\bar{Y}$.

(iii) Požiadavka progresívnej merateľnosti procesu Y je splnená, napríklad ak volíme fBp, ako Vilela Mendes a kol. Vidno to z reprezentácie (3.15). Rovnako však možno voliť hermitovský proces (3.13) ľubovoľného vyššieho rádu.

Dôkaz vety 4.5. Podľa druhej fundamentálnej vety oceňovania je trhový model úplný, ak v ňom existuje jednoznačná rizikovo neutrálna miera (EMM). Ukážeme teda, ako je bežné, najskôr jej existenciu, a potom jednoznačnosť. V dôkaze existencie na splnenie Novikovovej podmienky ukážeme ohraničenosť procesu σ, zvyšok je klasické použitie Girsanovovej vety (porov. dôkaz vety 4.1). Na dôkaz jednoznačnosti využijeme obrátenú Girsanovovu vetu (veta 1.3).

Existencia. Všimnime si najskôr, že zo vzťahu (4.36) plynie $\sigma \in L^\infty([0,T] \times \Omega)$: $\forall\, t \in [0,T]$, $\forall\, \omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} & \bar{Y}_t(\omega) \in [-M, M] \\ \Rightarrow \qquad & \left(\bar{Y}_t(\omega) - \bar{Y}_{t-\delta}(\omega)\right) \in [-2M, 2M] \\ \Rightarrow \qquad & \sigma_t(\omega) \in \left[\exp\left\{\beta - 2M\frac{k}{\delta}\right\}, \exp\left\{\beta + 2M\frac{k}{\delta}\right\}\right]. \end{aligned}$$

Potom je už postup v podstate identický s použitím Girsanovovej vety v prvom kroku dôkazu vety 4.1. Jediný rozdiel je, že neuvažujeme o súčinovom priestore, takže netreba fixovať žiadne ω_2. To nevadí, pretože σ má minimum nielen na jednotlivých trajektóriách, ale globálne na $[0,T] \times \Omega$. Kvôli zrejmosti zmienený postup v skratke uvedieme.

Proces diskontovanej ceny aktíva má opäť tvar (4.16):

$$\mathrm{d}S_t^* = \sigma_t S_t^* (\,\mathrm{d}W_t - \gamma_t\,\mathrm{d}t),$$

kde proces trhovej ceny rizika

$$\gamma_t(\omega) = \frac{r - \mu_t(\omega)}{\sigma_t(\omega)}$$

je progresívne merateľný. Girsanovovská hustota je

$$\eta_T(\omega) := \mathscr{E}\left\{\int_0^T \gamma_s(\omega)\,\mathrm{d}W_s(\omega)\right\} = \exp\left\{\int_0^T \gamma_s(\omega)\,\mathrm{d}W_s(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_s^2(\omega)\,\mathrm{d}s\,\right\}.$$

Taktiež Novikovova podmienka sa overí analogicky dôkazu vety 4.1:

$$\mathsf{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2\,\mathrm{d}t\right\}\right] \le \exp\left\{\frac{1}{2}A_1\right\}\mathsf{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}A_2\,\|\mu_\bullet\|^2_{L^2([0,T])}\right\}\right] < \infty,$$

kde

$$A_1 = \frac{2Tr^2}{\min\limits_{t,\omega}\sigma_t^2(\omega)} = \frac{2Tr^2}{\exp\left\{\beta - 2M\frac{k}{\delta}\right\}},$$
$$A_2 = \frac{2}{\min\limits_{t,\omega}\sigma_t^2(\omega)} = \frac{2}{\exp\left\{\beta - 2M\frac{k}{\delta}\right\}},$$

takže

$$\mathsf{E}[\eta_T] = 1.$$

Sú teda splnené predpoklady Girsanovovej vety, podľa ktorej

$$\widetilde{W}_t(\omega) := W_t(\omega) - \int_0^t \gamma_s(\omega)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,T],$$

je Wienerov proces na priestore $\left(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{\mathsf{P}}\right)$, kde miera $\widetilde{\mathsf{P}}$ je daná vzťahom

$$\mathrm{d}\widetilde{\mathsf{P}}(\omega) = \eta_T(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{P}(\omega).$$

Diskontovaná cena aktíva je na tomto priestore, analogicky vzťahu (4.21),

$$S_t^*(\omega) = S_0^*(\omega)\exp\left\{\int_0^t \sigma_s(\omega)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_s(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2(\omega)\,\mathrm{d}s\right\},$$

čo, ako vieme z vlastností Itoovho integrálu a exponenciálnych martingalov, je $\widetilde{\mathsf{P}}$-martingal, lebo

$$\sigma \in L^\infty([0,T]\times\Omega) \subset L^2([0,T]\times\Omega),$$

takže $\widetilde{\mathsf{P}}$ je hľadaná EMM.

Jednoznačnosť. Nech $\widehat{\mathsf{P}}$ je ľubovoľná EMM na $(\Omega, \mathcal{F})$. Pretože $\mathbb{F}$ je obohatená filtrácia generovaná Wienerovym procesom W, podľa obrátenej Girsanovovej vety existuje jednorozmerný $\mathbb{F}$-progresívne merateľný reálny proces Φ taký, že hustotu (Radonovu-Nikodýmovu deriváciu) miery $\widehat{\mathsf{P}}$ voči pôvodnej miere P je možné vyjadriť ako

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{\mathsf{P}}}{\mathrm{d}\mathsf{P}}(\omega) = \exp\left\{\int_0^T \Phi_s(\omega)\,\mathrm{d}W_s(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^T \Phi_s^2(\omega)\,\mathrm{d}s\right\}$$

a proces $\widehat{W} = \{\widehat{W}_t, t \in [0,T]\}$,

$$\widehat{W}_t = W_t - \int_0^T \Phi_s\,\mathrm{d}s, \tag{4.38}$$

je štandardný Wienerov proces na priestore $(\Omega, \mathcal{F}, \widehat{\mathsf{P}})$. Zo vzťahov (4.16) a (4.38) potom vyplýva, že diferenciál diskontovanej ceny aktíva je na tomto priestore

$$\mathrm{d}S_t^* = (\mu_t - r + \sigma_t\Phi_t)S_t^*\,\mathrm{d}t + \sigma_t S_t^*\,\mathrm{d}\widehat{W}_t.$$

Ale pretože S^* je $\widehat{\mathsf{P}}$-martingal, musí mať nulový drift, čiže pre skoro všetky $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$

$$\mu_t(\omega) - r + \sigma_t(\omega)\Phi_t(\omega) = 0,$$

z čoho je zrejmé, že

$$\Phi_t(\omega) = \frac{r - \mu_t(\omega)}{\sigma_t(\omega)} = \gamma_t(\omega) \quad (t, \omega)\text{-s.i.}$$

Pre všetky EMM $\widehat{\mathsf{P}}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ teda platí $\widetilde{\mathsf{P}} \equiv \widehat{\mathsf{P}}$, takže model je úplný. □

Poznámka 4.9. Pre dôkaz vety 4.5 nielen že nie je nutné, aby proces $\bar{Y}$ určujúci volatilitu vo vzťahu (4.36) bol fBp, ale nie je ani potrebné, aby bol hermitovský, ba dokonca ani spojitý. Skutočne, ako sme uviedli v predpokladoch vety, postačí jeho progresívna merateľnosť voči filtrácií generovanej Wienerovym procesom riadiacim cenu aktíva, aby mal zmysel Itoov integrál volatility a aby v modeli nebol iný zdroj náhodnosti. Projekcia $\Pi^{(M)}$ je jednoducho z matematického pohľadu pre účel úplnosti modelu nadmerne silný nástroj, silnejší než je potrebné na vyriešenie problémov uvedených v poznámke 4.7 (iv). Keďže M môže byť ľubovoľne veľké, v praxi by takéto tvrdé ohraničenie nemuselo byť problémom. Otázkou ale ostáva, nakoľko sa pri takomto tvrdom ohraničení zachovajú žiadúce vlastnosti hermitovského procesu, predovšetkým, no nielen dlhá pamäť.

Záver

V tejto práci sme sa venovali problematike modelovania trhových výnosov v spojitom čase. V prvých troch kapitolách sme uviedli základný aparát z teórie pravdepodobnosti a finančnej matematiky; históriu vývoja paradigiem o volatilite až po zistenie, že vykazuje dlhú pamäť; a základy Malliavinovho počtu, pomocou ktorých možno definovať hermitovské procesy, charakteristické práve týmto javom. Tým sme zavŕšili kompilačnú časť práce.

Získané poznatky sme využili k preskúmaniu viet o neprípustnosti arbitráže a úplnosti modelu navrhovaného v článku Vilela Mendes a kol. (2015). Viaceré tvrdenia, ktoré jeho autori naznačujú, alebo len voľne odvádzajú, sme podrobne formulovali a detailne sme vypracovali príslušné dôkazy, pričom niektoré časti sme nahradili vlastným postupom, ktorý považujeme za podrobnejší, prehľadnejší, či úplnejší. Našim hlavným záverom je, že frakcionálny Brownov pohyb v rovnici volatility Vilela Mendesovho modelu je z hľadiska matematiky možné nahradiť ľubovoľným hermitovským procesom.

Tým sa otvára priestor pre ďalšie, predovšetkým empirické skúmanie otázky, či niektorý iný hermitovský proces, napríklad hojne študovaný Rosenblattov, neposkytne hodnovernejšiu ekonomickú interpretáciu, či lepší súlad s empirickými dátami než frakcionálny Brownov pohyb. Otvorenou ostáva i otázka korelácie riadiacich procesov a úplnosti modelu. Potenciálnou možnosťou pre rozšírenie je implementácia skokov podobne, ako Bates rozšíril Hestonov model.

Zoznam použitej literatúry

Alòs, E. a Nualart, D. (2003). Stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion. *Stochastics and Stochastic Reports*, **75**(3), 129–152. doi: 10.1080/1045112031000078917.

Androshchuk, T. O. a Mishura, Y. S. (2006). A mixed Brownian-fractional Brownian model of stock market: the absence of arbitrage and the convergence of capitals. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky*, (1), 7–13. ISSN 1025-6415.

Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **3**(17), 21–86.

Bates, D. S. (1996). Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options. *Review of Financial Studies*, **9**(1), 69–107. doi: 10.1093/rfs/9.1.69.

Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*, volume 61 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, Boca Raton, Florida. ISBN 0-412-04901-5.

Biagini, F., Campanino, M. a Fuschini, S. (2008). Discrete approximation of stochastic integrals with respect to fractional Brownian motion of Hurst index $H > 1/2$. *Stochastics*, **80**(5), 407–426. doi: 10.1080/17442500701594672.

Björk, T. (1998). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press.

Black, F. a Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**(3), 637–654. doi: 10.1086/260062.

Bojanic, R. a Seneta, E. (1971). Slowly varying functions and asymptotic relations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **34**(2), 302–315. doi: 10.1016/0022-247x(71)90114-4.

Box, G. E. P. a Jenkins, G. M. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden-Day, San Francisco. ISBN 0816210942.

Breidt, F. J., Crato, N. a de Lima, P. (1998). The detection and estimation of long memory in stochastic volatility. *Journal of Econometrics*, **83** (1-2), 325–348. doi: 10.1016/s0304-4076(97)00072-9.

CHIN, S. S. (2011). *Stochastic Volatility Model and Option Pricing*. Dizertačná práca, The University of Melbourne.

CHRISTIE, A. A. (1982). The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects. *Journal of Financial Economics*, **10** (4), 407–432.

COMTE, F. a RENAULT, E. (1998). Long memory in continuous-time stochastic volatility models. *Mathematical Finance*, **8**(4), 291–323. doi: 10.1111/1467-9965.00057.

COX, J. C. a ROSS, S. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, **3**(1-2), 145–166.

DOBRUSHIN, R. L. a MAJOR, P. (1979). Non-central limit theorems for non-linear functional of Gaussian fields. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **50**(1), 27–52. doi: 10.1007/bf00535673.

ČEKAL, M. (2012). Blackovy-Scholesovy modely oceňování opcí. Diplomová práca, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta.

EMBRECHTS, P. a MAEJIMA, M. (2002). *Selfsimilar Processes*. Princeton University Press, New York. ISBN 9780691096278.

ENGLE, R. F. a PATTON, A. J. (2001). What good is a volatility model? *Quantitative Finance*, **1**(2), 237–245. doi: 10.1088/1469-7688/1/2/305.

ENGLE, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, **50**(4), 987. doi: 10.2307/1912773.

EPPS, T. W. (1996). Stock prices as branching processes. *Stochastic Models*, **12**(4), 529–558.

EPPS, T. W. (2009). *Quantitative Finance*. JOHN WILEY & SONS INC. ISBN 0470431997.

FELLER, W. (1951). Two Singular Diffusion Problems. *The Annals of Mathematics*, **54**(1), 173. doi: 10.2307/1969318.

GIRSANOV, I. V. (1960). On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures. *Theory of Probability & Its Applications*, **5**(3), 285–301. doi: 10.1137/1105027.

HARRISON, J. M. a PLISKA, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, **11**(3), 215–260. doi: 10.1016/0304-4149(81)90026-0.

HESTON, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, **6**(2), 327–343. ISSN 0893-9454. doi: 10.1093/rfs/6.2.327.

Hobson, D. G. a Rogers, L. C. G. (1998). Complete Models with Stochastic Volatility. *Mathematical Finance*, **8**(1), 27–48. doi: 10.1111/1467-9965.00043.

Hull, J. C. a White, A. D. (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *The Journal of Finance*, **42**(2), 281–300. doi: 10.1111/j.1540-6261.1987.tb02568.x.

Itô, K. (1944). Stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy, Tokyo*, **20**, 519–524.

Kolmogorov, A. N. (1940). Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum. *C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, **26**, 115–118.

Lachout, P. (2004). *Teorie pravděpodobnosti.* Učební texty Univerzity Karlovy v Praze. Karolinum, Praha, second ed. edition. ISBN 80-246-0872-3.

Maejima, M. a Tudor, C. A. (2007). Wiener Integrals with Respect to the Hermite Process and a Non-Central Limit Theorem. *Stochastic Analysis and Applications*, **25**(5), 1043–1056. doi: 10.1080/07362990701540519.

Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*, **36**(4), 394.

Mandelbrot, B. B. a Van Ness, J. W. (1968). Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review*, **10**(4), 422–437.

Mandelbrot, B. (1971). When can price be arbitraged efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models. *The Review of Economics and Statistics*, **53**(3), 225–236.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7**(1), 77. doi: 10.2307/2975974.

Martens, M., Dijk, D. a Pooter, M. (2004). Modeling and forecasting S&P 500 volatility: Long memory, structural breaks and nonlinearity. Technical Report TI04-067/4, Erasmus University Rotterdam.

Melicherčík, I., Olšarová, L. a Úradníček, V. (2005). *Kapitoly z finančnej matematiky.* Epos, Bratislava. ISBN 8080576513.

Merton (1990). *Continuous-Time Finance.* Basil Blackwell Inc., Cambridge, Massachusetts, revised edition 1992 edition. ISBN 0631185089.

Merton, R. C. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *The review of Economics and Statistics*, pages 247–257.

Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**(1), 141. doi: 10.2307/3003143.

Novikov, A. A. (1973). On an identity for stochastic integrals. *Theory of Probability & Its Applications*, **17**(4), 717–720. doi: 10.1137/1117088. Pôvodná ruská verzia: Teor. Veroyatnost. i Primenen., 1972.

NUALART, D. (2003). Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications. In *Stochastic Models: Seventh Symposium on Probability and Stochastic Processes, June 23-28, 2002, Mexico City, Mexico*, Contemporary Mathematics, pages 3–39. American Mathematical Society. doi: 10.1090/conm/336/06025.

NUALART, D. (2005). *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Springer, Berlin, Heidelberg. ISBN 3-540-28328-5.

NUALART, D., MAZET, O. a ALÒS, E. (2001). Stochastic Calculus with Respect to Gaussian Processes. *The Annals of Probability*, **29**(2), 766–801. doi: 10.1214/aop/1008956692.

ØKSENDAL, B. (2014). *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, Heidelberg, New York, Šieste vydanie edition. ISBN 3540047581. Prvé vydanie 1998.

ROGERS, L. C. G. (1997). Arbitrage with fractional Brownian motion. *Mathematical Finance*, **7**(1), 95–105.

RUBINSTEIN, M. (1985). Nonparametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the 30 most active CBOE option classes from August 23, 1976 through August 31, 1978. *The Journal of Finance*, **40**, 455–480. ISSN 0022-1082. doi: 10.1111/j.1540-6261.1985.tb04967.x.

RUDIN, W. (1960). *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Education Ltd, Singapore. ISBN 0071002766.

SAMORODNITSKY, G. (2006). Long Range Dependence. *Foundations and Trends® in Stochastic Systems*, **1**(3), 163–257. ISSN 1551-3106 print version, 1551-3092 online version. doi: 10.1561/0900000004.

SAMORODNITSKY, G. a TAQQU, M. S. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman & Hall, New York. ISBN 0412051710.

SAMUELSON, P. A. (1965). Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. *Industrial Management Review*, **6**(2), 41–49.

SAMUELSON, P. A. (1973). Mathematics of Speculative Price. *SIAM Review*, **15**(1), 1–42. doi: 10.1137/1015001.

SATTAYATHAM, P. a INTARASIT, A. (2011). An approximate formula of European option for fractional stochastic volatility jump-diffusion model. *Journal of Mathematics and Statistics*, **7**(3), 230–238. doi: 10.3844/jmssp.2011.230.238.

SCHACHERMAYER, W. (2010). *The fundamental theorem of asset pricing*, pages 792–801. John Wiley & Sons, Ltd. Dostupné na: <https://www.mat.univie.ac.at/ schachermayer/preprnts/prpr0141a.pdf> [cit. 2018-07-16].

Seidler, J. (2011). *Vybrané kapitoly ze stochastické analysy.* MatfyzPress, Praha. ISBN 978-80-7378-145-3. Dostupné na (vybraných časti): <http://simu0292.utia.cas.cz/seidler/teaching.html> [cit. 2017-10-23].

Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II.* Springer, New York. ISBN 0387401016.

Sobotka, T. (2014). Modely stochastické a frakcionální stochastické volatility. Diplomová práce, Zapadočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky.

Taqqu, M. S. (1979). Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **50**(1), 53–83. doi: 10.1007/bf00535674.

Taqqu, M. S. (1986). *A bibliographical guide to self-similar processes and long-range dependence*, pages 137–162. Birkhäuser, Boston. [MR Ref: 88g:60091], [AMS Subj. Class.: 60Gxx (60-00 82-01)].

Taqqu, M. S., Teverovsky, V. a Willinger, W. (1995). Estimators for Long-range Dependence: An Empirical Study. *Fractals*, **03**(04), 785–798. doi: 10.1142/s0218348x95000692.

Taylor, S. J. (1994). Modeling stochastic volatility: A review and comparative study. *Mathematical finance*, **4**(2), 183–204.

Taylor, S. J. (2007). *Asset Price Dynamics, Volatility, and Prediction.* University Press Group Ltd. ISBN 0691134790.

Týbl, O. (2017). Stochastická integrace. Bakalářská práce, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta.

Tudor, C. A. (2008). Analysis of the Rosenblatt process. *ESAIM Probability and Statistics*, **12**, 230–257. ISSN 1292-8100. doi: 10.1051/ps:2007037.

Vilela Mendes, R. (2008). The fractional volatility model: An agent-based interpretation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **387**(15), 3987–3994. doi: 10.1016/j.physa.2008.01.052.

Vilela Mendes, R. a Oliveira, M. J. (2008). A Data-Reconstructed Fractional Volatility Model. *Economics Discussion Papers*, (22). ISSN 1867-8009.

Vilela Mendes, R., Lima, R. a Araújo, T. (2002). A Process-Reconstruction Analysis of Market Fluctuations. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **05**(08), 797–821. doi: 10.1142/s0219024902001730.

Vilela Mendes, R., Oliveira, M. J. a Rodrigues, A. (2015). No-Arbitrage, Leverage and Completeness in a Fractional Volatility Model. *Physica A*, (419), 470–478.

Wiggins, J. B. (1987). Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates. *Journal of Financial Economics*, **19**(2), 351–372. doi: 10.1016/0304-405x(87)90009-2.

WILLINGER, W., TAQQU, M. S. a TEVEROVSKY, V. (1999). Stock market prices and long-range dependence. *Finance and Stochastics*, **3**(1), 1–13. doi: 10.1007/s007800050049.